《當代教育研究》季刊
第十七卷第四期，2009 年 12 月，頁 61-101

準教師從眞實情境中建構數學模式的認知因素分析與機制

左台益[*]　胡政德[**]

摘　要

數學建模強調現實世界與數學世界間的連結（connections），是一種知識統整的數學能力。本研究主旨在分析與瞭解準教師數學建模歷程中的認知因素及轉化機制，以做爲師資培育課程發展之參考。研究方法採半結構活動設計方式，觀察蒐集分成五組26位準教師的建模過程，進行質性分析。

研究結果發現：一、影響準教師建模的認知因素有五項，包括：（1）經驗提取；（2）簡化與假設；（3）物件抽取；（4）物件轉化；（5）分析數學物件關係；二、建模過程爲一致性，而非跳躍性的思維；三、準教師數學建模轉化方式主要有兩種：（1）物件模式，著重真實情境的物件；（2）操作模式，著重物件的數學關係。本研究依據研究結果，對數學建模課程活動提出具體建議，可做爲未來師資培育數學建模課程設計之參考。

關鍵詞：數學建模、數學能力、師資培育

[*] 左台益，國立臺灣師範大學數學系副教授
電子郵件：tsoty@math.ntnu.edu.tw
[**] 胡政德，國立臺灣師範大學數學系博士班研究生（通訊作者）
電子郵件：jack1012@gmail.com
投稿日期：2009年8月19日；修正日期：2009年10月23日；接受日期：2009年12月4日

Contemporary Educational Research Quarterly
Dec., 2009, Vol.17 No.4, pp. 61-101

Analyzing and Understanding the Cognitive Factors and Translation Mechanisms of Pre-service Teachers in Their Processes of Mathematical Modeling

Tai-Yih Tso* Cheng-Te Hu**

Abstract

Mathematical modeling stresses on the connection between the real world and mathematics, and it is a mathematical literacy related to knowledge integration. This study aims to analyze and understand the cognitive factors and translation mechanisms of pre-service teachers in their processes of mathematical modeling. The results can be considered in developing teacher education programs. The method is to use semi-structural activities, to observe the modeling process of 26 pre-service teachers divided into 5 groups. Qualitative analysis is employed afterwards.

The results are in what follows: Firstly, there are five cognitive factors that

---

* Tai-Yih Tso, Associate Professor, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
E-mail: tsoty@math.ntnu.edu.tw

** Cheng-Te Hu, Doctoral Student, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
E-mail: jack1012@gmail.com

Manuscript recieved: Aug. 19, 2009; Modified: Oct. 23, 2009; Accepted: Dec. 4, 2009

affect pre-service teachers' modeling process: (a) experience recalling, (b) simplification and supposition, (c) object abstraction, (d) object translation, and (e) analysis of relations among mathematical objects. Secondly, the whole process of modeling is coherent. Thirdly, there are two ways of translation for pre-service teachers in their modeling processes: (a) object model, a model consisting of physical conditions and focusing on physical objects, and (b) action model, a model consisting of mathematical objects, but focusing on actions on those objects. This study gives concrete suggestions to mathematical modeling courses according to its results, and can be considered in designing mathematical modeling courses for teacher education programs.

Keywords: mathematical modeling, mathematics competence, teacher education

壹、緒論

一、研究背景與動機

培育學生數學能力是近年來各國數學教育研究趨勢與教學重點。數學建模（Mathematical Modeling）能力即列為八種主要數學能力之一（Niss, 2002），它強調現實世界與數學世界間知識的連結與統合，是一種知識統整的能力。數學建模起始於對現實世界中具體現象或問題的探索，透過分析問題現象的因素與結構關係，形成抽象概念的數學系統，建立數學模式以詮釋現象或解決問題的歷程。楊凱琳與林福來（2006）更明確地詮釋「建模」，除了要找出問題的答案，更重要的是，過程中體驗概念化的瞭解、嘗試表徵化的資訊處理、詮釋模式和現象間的意義，累積這些經驗漸漸形成建模過程所需的能力，以培養學生的數學能力。

數學建模在教學實務上具體表現出數學內部的溝通，以及數學外部的連結。近年來，我國的中學數學將連結列為五大能力指標之一，強調連結能力的重要性。美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）也明確地指出數學內部溝通以及數學外部連結的重要性，如果數學知識與技能欠缺內部連結，那麼個體必須記憶過多獨立的概念，如果欠缺外部連結，則無法發現數學知識在其他領域的功能，也無法運用這些數學知識在其他領域之中。隨著教育的改革，學習數學的重點擴展為五大主題：數與量、圖形與空間、統計與機率、代數、連結，這樣的一個改變對於台灣數學教師的教學自然會有相當大的影響，前四大主題為傳統所著重的數學知識，而連結是近來特別強調的學習主題。教師對於教導連結的課程常常不知所措與產生困難。根據鄭玉雯（2004）針對國內對於數學領域連結主題的落實情形調查研

究指出，數學教師雖然認同連結的重要性，但在教學實務上，教師普遍感到困難，其原因之一在於教師對於「連結」主題缺乏相關的資訊與教學訓練。因此，瞭解學生如何從真實情境中建構數學模式做為數學建模教學參考是亟需探討之主題。

楊凱琳與林福來（2006）從高中生數學建模過程研究提出高中數學融入建模活動的支撐策略，做為在職教師進行專業發展的參考，並明確地指出台灣數學教育的現況不利於建模教學活動，其主要因素包含教師和學生的既有經驗、升學考試與現有的數學教材……等因素。要排除這些不利因素，其中之一是教師需具備數學建模的概念與經驗。因此，如何讓教師具有數學建模的概念與經驗是一個相當重要的議題，更需要在師資培育發展數學建模活動課程，以培養準教師建模的能力。

在數學師資培育學程中，專業課程設計的一項重要考量為「從高觀點的數學連接到中學數學的學習」。這樣一個想法在二十世紀初，教育家Dewey即已提出，他認為：

> 每一個學科課程有兩個面向：一個面向是提供給科學家做為科學家的課程；另外一個面向，是提供教師做為科學教師的課程；這兩個面向不是相對矛盾的，而是互補的，但這兩個也不是可以立即區分出來的。對於科學家而言，課程主題是呈現一些真實且應用在處理新問題與在學術研究……。而對教師是不同的，教師必須連接他們的經驗至孩童的發展。（Dewey, 1902；引自Sowder, 2007）

在一般大學或研究所中，高等微積分、代數學……等通常是在訓練數學家成為數學家的數學專業課程，並不一定能完全適合數學教師所需要之高觀點數學。台師大近年來在教學碩士班開授中學教師的分析學、中等教師的代數學、中學教師的幾何學，目的即是在培養教師以高觀點數學連接中學數學的學

習。同樣地，中學教師的數學建模課程亦亟待開發，以做為中學數學教師學習建模的經驗與概念。

數學建模是一種重要的數學能力，在數學研究所層級的課程中通常會開設數學建模（數學家的數學建模），其強調數學的模式與研究數學模式的方法。而中學數學的連結，包含了察覺、轉化、解題、溝通、評析，是一連串的歷程，從一開始察覺生活及其他領域的某些情境中的問題，經過轉化成為數學問題，再由解題中內部連結將問題解決，透過溝通與評析和其他人分享解決問題的過程、想法與方法。兩相比較下，很明顯地可以看到高等數學與中學數學之間的差距，而高等的數學思維——「數學建模」如何與中學數學「連結」，是師資培育課程設計中的一個重要議題，若能先瞭解準教師數學建模活動的過程及其可能面臨的困難，則可提供中學教師的數學建模課程設計之參考。

近年來，數學建模做為數學教學與學習的相關議題已經引起國際數學教育的關注與探討。國際數學教育委員會（The International Commission on Mathematical Instruction, ICMI）即在2004年第14屆國際數學教育會議（The International Congress on Mathematical Education, ICME）中以數學建模做為主要研究主題。一些研究都指出數學建模在學習上的重要性（Lesh & Doerr, 2003; Niss, 2002; Schoenfeld, 1992），但許多研究也同時指出數學建模並不是一個簡單的歷程（Treilibs, 1979; Treilibs, Burkhardt, & Low, 1980）。在這些研究中，描述了數學建模的流程，亦即大學數學建模課程中所描述一般建模歷程，在目前的研究中鮮少從認知面向來探討數學建模歷程。而Blum（2002）認為，數學建模歷程與認知策略是值得研究的重要議題。

二、研究目的與問題

基於數學建模是重要的數學能力之一，而且中學數學學習也特別強調

「連結」，教師需具備數學建模的知識與經驗，以引導學生進行建模活動，但教師對於數學建模的經驗卻是缺乏的。在數學教師培育的過程中，應提供機會讓準教師有建模的經驗與概念。因此，需要開發準教師的數學建模課程，而課程開發與設計除了考量專業領域知識，亦需要參考準教師本身的認知發展，若能先瞭解準教師在數學建模歷程與產生的困難，可以做爲重要的參考依據。

因此，本研究目的即在分析與瞭解準教師數學建模的細部歷程，尤其是理想化與數學化之過程（統稱爲形式化過程），以做爲師資培育數學建模課程設計的參考。

在數學教育研究社群中，從認知面向來探討數學教育是一個重要的觀點，而關於數學建模歷程之研究，鮮少從認知面向來探討數學建模之歷程。因此，本研究從認知的觀點提出以下兩個研究問題，來探討數學建模之形式化過程：

（一）影響準教師在數學建模過程中進行形式化之認知因素爲何？

（二）準教師數學建模過程中形式化的機制爲何？

貳、理論架構

本研究之主要目的在分析與瞭解準教師數學建模的歷程，本章主要論述關於數學建模的理論背景與認知表徵系統，首先從數學建模的意義談起，從結構觀（何謂模式與數學模式）與過程觀（數學建模歷程）來探討數學建模，最後再從認知面向引入認知表徵系統來詮釋數學建模歷程，以闡述本研究的理論架構。

一、數學建模的意義

一般而言，建模是指建立模式來進行操弄、說明及進一步預測，其中，

模式是指真實世界的表徵物；數學模型是指使用數學的工具和物件（包含電腦和電腦軟體）所建立的模型（Mooney & Swift, 1999: 1）。

科學家或工程學家認為，數學模式已經成為解決真實問題的方法或工具，而其在建立數學模式時會將問題簡化，只考慮主要的因素，其餘因素則暫不考慮，只建立一個較粗糙的模式，然後在這個模式為基礎，逐步地考慮次要因素，進而建立一個與實際狀況更符合的模式。

數學家認為數學建模的重要性，主要來自在數學中扮演了兩個重要的角色：其一，數學建模是「應用數學的基礎」（The essence of applied mathematics）（Peirce, 1956；引自Treilibs, 1979）；其二，數學建模是「數學中的科學方法」（The mathematical equivalent of the "scientific method"）（Hall, 1972；引自Treilibs, 1979）。一般而言，數學家所研究的數學模式通常源自於複雜的情境，譬如，數學家Euler從著名的七橋問題發展出圖論、法國科學家Morlet處理地震波問題發展出小波理論。

以上的觀點皆指出，數學建模是人們認識與探索現實世界的重要方法，數學建模起始於對現實世界中具體現象或問題的探索，透過分析問題現象的因素與結構關係，形成抽象概念的數學系統，進而建立數學模式以詮釋現象或解決問題的歷程。

二、模式與數學模式

「模式」（Model）是什麼呢？而「數學模式」（Mathematical Model）又是什麼？雖然模式是一般日常生活用語，例如，玩具模型（Toy Model）、時裝模特兒（Faison Model）、量子力學模型、經濟學模式……等等，但卻很難給一個明確的說明。以下將統整相關文獻，以闡述模式與數學模式。

Niss（1989）定義一個模式有三個要素（A, M, f），其中，A（Aim）是具

體世界的一個事件，f（function）是一個寫像關係（mapping）——將特定的目標轉化形成一個模式M（Model）。Apostel（1960；引自Warzel, 1989）認爲，數學建模的關係結構爲R（S, P, M, T）的系統，其中，M（Model）爲模式；T（Prototype）爲原型；S（Subject）爲組成元素；P（Purpose）爲目的。建模過程被視爲一個關係系統（R），而其中主要的要素爲S、P、M、T，模式（M）是從原型（T）根據某些目的（P）所轉化而形成的，由組成元素（S）組成模式（M），譬如，原型是一台真實的飛機，爲了讓小孩子玩或個人收藏，而使用了塑膠原料來製作飛機模型，若爲了模擬計算飛機的飛行，而使用數學方程式來表徵數學模式。因此，數學模式通常是指使用數學表徵所組成的模式。

以上的定義是以結構觀（物件觀）來定義模式，雖然提供了一些面向來分析建立模式的因素，我們可以瞭解學生所掌握的數學模式之結構。然而，在數學學習的過程中，學生必須同時掌握物件（object）與歷程（process），所以，我們還需要分析學生建立數學模式的歷程。因此，我們必須再從過程觀點來探討模式與建模過程，接著再探討數學建模歷程。

三、數學建模歷程

數學家Euler處理七橋問題是數學建模的一個經典例子。Euler在處理七橋問題時，先將真實世界的問題理想化形成一個幾何模式，然後轉化成一筆畫的圖論模式，再以數學分析方式解決七橋問題。Euler在其所發展出之數學模式的系統中計算、驗證其結果，再回到現實世界中詮釋、重置現實的七橋問題，然後考慮不同情況不斷的循環這個過程，才進一步奠定圖形理論數學抽象系統的理論基礎。在數學建模中這樣的一個循環過程，在本研究中稱爲數學建模歷程。

Burkhardt（1979）認為，在數學建模的歷程中有四大重要步驟：形式化（Formulation）、求解（Solution）、解釋（Interpretation）、驗證（Validation）。Blum（2002）說明數學建模的歷程主要包含了四個層面：理想化、數學化、數學操作和詮釋評估（參考圖1），而且數學建模是在這四個層面中循環。Kaiser（2005）更進一步闡述數學建模過程是先建構出真實模式，再轉化為數學模式，然而，在應用數學領域中，一般的見解並不區分情境（真實）模式和數學模式的不同。但是，從一個真實問題到數學問題的轉化是為數學建模的核心。

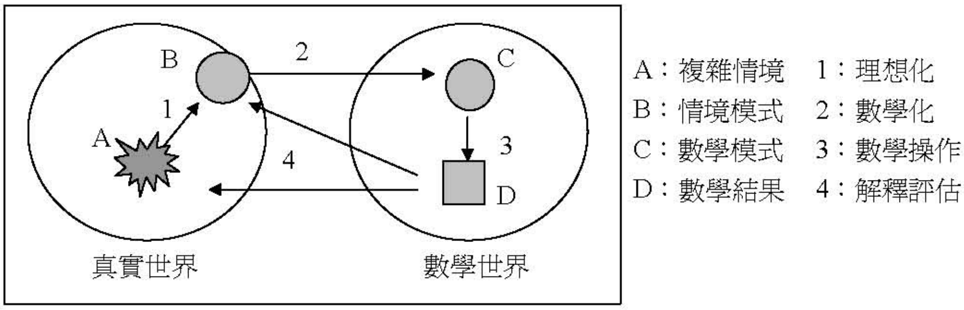


圖 1　數學建模循環模式

資料來源：Blum (2002).

楊凱琳與林福來（2006）認為，除了理論上數學建模的四種子歷程：形成問題和建立模式、數學化此模式、求此數學問題的解、詮釋解答和現實做比較，也有可能會提出推廣應用的問題。關於推廣與應用，研究者認為此過程偏向應用，而且不必然發生於建模歷程。

從以上學者的論述，對於數學建模過程已經具有Blum之循環模式之共識。本研究即採用Blum描述數學建模歷程觀點（參考表1），將數學建模的歷

表 1　數學建模歷程

Burkhardt（1979）	Blum（2002）、Kaiser（2005）	楊凱琳與林福來（2006）
形式化（formulation）	理想化（簡化或結構化）	形成問題 建立模式
	數學化	數學化模式
求解（solution）	數學操作（求解）	求數學問題的解
解釋（interpretation）	詮釋	詮釋解答和現實做比較
驗證（validation）	評估	

程主要分為四個層面：

（一）理想化：將情境理想化，或者說結構化與簡化，形成一個真實世界的具體模式。

（二）數學化：將建構的具體模式數學化，亦即將模式轉換成數學的結構，而形成一個起始情境的數學模式。

（三）數學操作：操作數學模式產生數學結果，例如，解方程式、證明……等。

（四）解釋評估：於真實情境中解釋數學結果之意義，並檢查模式是否合理。

數學建模的過程在真實世界與數學世界往返，這之間包含了兩種重要的模式「情境模式」與「數學模式」的轉移。

本研究為了探討數學建模中理想化與數學化之過程，將區分「情境模式」與「數學模式」，以闡述建模之不同階段過程。

在現實世界的模式稱為「情境模式」，其組成元素是一些具體的事物，且符合具體的現象與關係，通常以具體情境的語言或符號來呈現，譬如，道路、

地圖、理想化的圖形……等等；而在數學世界的模式稱爲「數學模式」，其組成元素是一些數學物件，且具結構性的數學概念系統，所以通常會使用數學符號或其他表徵工具來表徵或呈現模式，例如，函數、方程式、電腦程式……等等。

然而，在現實生活情境中，並不是每個人都像大數學家Euler一樣，能夠快速地掌握核心概念，就將情境以數學表徵來呈現。根據Lin與Yang（2005）指出臺灣學生之建模歷程類型可以發現，不管哪一類型的學生建模歷程，學生都很難發展出情境模式，更不用說要建立數學模式了。因此，下一節將從認知的觀點來探討數學建模的過程與困難。

四、數學建模之認知表徵系統

Kaput（1989）從多重表徵的認知觀點分析個體建構情境模式之認知過程，並說明個體是透過建構認知表徵系統的過程來建立現實情境的模式（參考圖2）。在一個作業中，可以用多種不同的表徵來表徵情境（C），譬如，可以文字表徵（B）描述此情境。個體透過閱讀（解析表徵）轉化成爲表徵之內在認知結構（B_{cog}），再經由表徵詮釋建立此情境的認知表徵（C_{cog}）。在情境中，某些特徵中蘊含著數量的關係，這些數量特徵喚起相關的數學形式之認知表徵（A_{cog}），然後個體將其投射於一個外在的形式表徵（A）用來表徵情境（C）。而這樣一個過程通常重複著循環的模式。

依據Lesh與Doerr（2003）模式的定義，他們認爲模式是一種概念性系統（conceptual systems），這個系統包括被操作的元素、操作規則、元素或規則間的相關性。模式，通常是使用外在記號（表徵）系統表示出來，並且使用模式去建構、描述或解釋其他系統的行爲（例如，經濟系統、大氣系統……等等）。

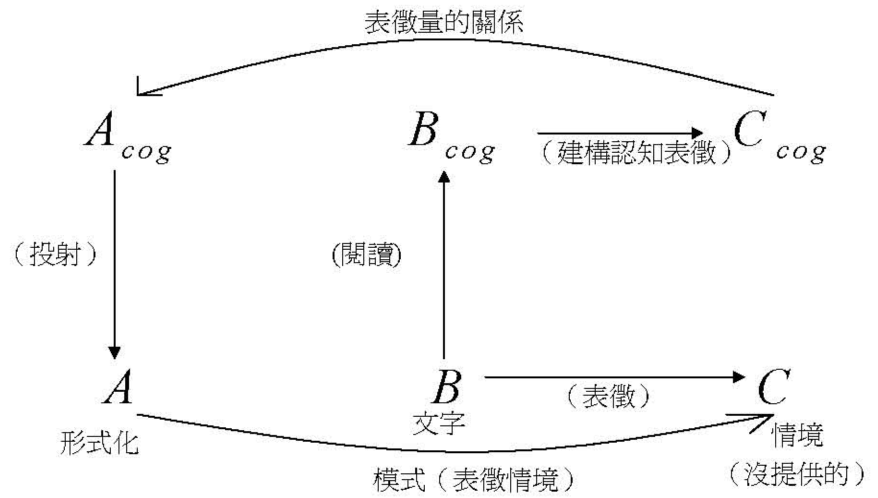


圖 2　建構模式之認知表徵系統

資料來源：Kaput (1989).

整合Kaput的想法及Lesh與Doerr對於數學建模的定義，數學建模過程會從複雜的情境中透過一些表徵（情境描述或條件）來建立對於情境的認知表徵系統（模式），透過解析數量的關係來建立數學模式，以外在的表徵形式（通常是數學式或圖表）來表徵模式。然而，個體並不是一下就可以建立完備的模式，通常需要透過不斷地讀取外在文字、符號或圖像與表徵內在認知表徵。因此，這整個過程必定牽涉複雜的認知歷程。

Dreyfus（1991）明確地指出，建模（modeling）包含了兩種重要的認知歷程：抽象過程（abstrating）及表徵過程（reprenting）。其中，

（一）抽象過程：當人們想要瞭解某個問題，就必須透過問題的外部表徵，經過理解來建立起這個問題的心智模式。

（二）表徵過程：模式即是內部心智的一部分，而內部的表徵無法直接傳達給其他人知道，所以必須透過外部的表徵來呈現。

簡言之，認知是指個人認識客觀事物（表示必須透過抽象過程）與反映客觀事物的特性與關係（表示必須去表徵這件事情）。因此，數學建模包含了兩個重要的認知過程，就是個體對於訊息的獲得與儲存（抽象過程），以及個體對於資訊的轉換、提取與使用（表徵過程），這也是影響個體建模過程中的重要認知因素。因此，在本研究中依據Kaput與Dreyfus的理論，探討以下兩個認知面向的問題：（1）如何選取訊息：在具體世界的眾多訊息中，如何選取所需要之關鍵訊息；（2）怎麼表徵這些訊息，描述複雜的情境，進而使用數學語言來描述。

參、研究方法

本研究目的即在分析與瞭解準教師數學建模的形式化過程，在準教師實際建模活動中，觀察與蒐集準教師如何從真實情境中建立模式，其中也包含了活動過程中的活動單與討論錄音，用以獲得準教師對於特定問題的想法或觀點。而我們關注於準教師整個數學建模活動的過程，不在於準教師所建構的模式是否正確。藉由觀察準教師數學建模的過程與準教師所書寫的活動單與討論資料，從準教師的觀點出發，可以藉由詮釋性分析來探討他們在數學建模的建構過程，並由這些分析結果來討論歸納出影響數學建模的認知因素。由於這樣的研究過程，本研究的特性與質性研究（參考Bogdan & Biklen, 1998）相同。

因此，我們需要採取質性研究方法。由於數學建模的觀點與傳統的學習觀點主要的不同在於，準教師處理的問題是現實的真正問題，以下我們將說明關於本研究的研究樣本、活動設計、資料蒐集與處理。

一、研究樣本

依據研究目的，本研究之實驗樣本是選擇師範大學數學系的準教師。他

們皆具相當程度的數學知識（熟悉高中數學且學過大學微積分與解析幾何），可排除數學知識不足的因素。本實驗樣本為24人，在研究過程由準教師自行隨機分5組，每組4至6人，以方便準教師們進行討論。（以下為了論述方便，以第1組代表第一組準教師，依此類推第5組代表第五組準教師）

二、活動設計

數學建模活動要如何選擇適當的數學題材，是研究上的一個大難題，要在數學教學或學習上，讓學生經驗像數學或科學家一樣針對一個難解問題進行研究的數學建模的過程是相當困難的。經典的七橋問題是一個典範數學建模例子，但對於本研究樣本之準數學教師而言，七橋問題是熟悉且已學習過的例子。因此，我們嘗試找出與七橋問題類似的例子。仔細分析七橋問題可以發現，此問題有以下這幾個基本特性，本研究設計係依據下列特性找尋一些適合的主題：

（一）與生活相關、易於瞭解且蘊含數學內容；

（二）不需要太多高深的數學知識；

（三）情境可以形成數學模式而不是發散的；

（四）提供數學內部的連結（例如，幾何與代數的連結）。

本研究分析披薩連鎖店劃分區域的問題，此問題的情境是真實世界的問題：「披薩連鎖店訂購中的客服人員如何決定哪個門市外送披薩」，這個問題是與生活相關且容易瞭解的，其背後所蘊含的數學內容為Voronoi圖，是計算幾何中的基本問題，而所需要的先備知識是一些基本的幾何性質與作圖，數學的表徵形式包含了幾何圖形與代數符號。披薩連鎖店劃分區域的問題符合這幾個特徵，而且這個對於準教師而言，是具有挑戰性的問題。因此，本研究以披薩連鎖店劃分區域的問題做為本研究建模活動的主題。

根據本研究之理論架構探討的數學建模歷程，數學建模起始於對現實世界中具體現象或問題的探索。因此，活動A1完全在具體情境中發展，以真實生活情境出發，提供真實的地圖與使用日常生活用語之問題。在此活動中，希望準教師能往建立模式發展，而不是無目的的思考，故設計三個子問題從開放性的問題到有條件限制的問題，以引導準教師進行建模活動。然後，研究者欲瞭解他們會留下哪些東西來幫助解決問題（建立模式），在活動A2要求準教師寫下或畫出他們所考慮的東西，以分析他們所抽取出的物件，進而探討如何表徵他們所建立的模式。在活動A3中，研究者欲瞭解準教師如何從真實情境過渡到數學模式，因此，在此活動中從理想化情境出發，給予僅有圓圈符號表是門市，並設計活動問題讓準教師轉化模式以及詮釋模式。

另一方面，依據本研究理論架構中的認知觀點來設計數學建模之活動，則包含了兩個重要的面向：（1）如何選取訊息；（2）怎麼表徵訊息。然而，關於面向（1），受限於研究工具並無法直接觀察到準教師如何選取訊息，因此，本研究將透過活動問題來引導準教師說明他們如何選取訊息。關於面向（2），雖然可以直接觀察準教師所使用的表徵，但還必須瞭解他們使用這個表徵的想法，才能掌握準他們怎麼表徵訊息。

本研究中個別的活動亦具有其研究目的（參考表2），活動A1探討理想化過程中如何選取資訊；活動A2理想化過程中怎麼表徵訊息；活動A3數學化過程中準教師如何選取訊息與怎麼表徵訊息。詳細的活動問題與相對應之活動目的參見表3。

三、資料蒐集與處理

數學建模的觀點與傳統的學習觀點不同，本研究爲了分析準教師發展數學模式的過程，設計數學建模學習活動，透過小組方式進行討論，並以活動

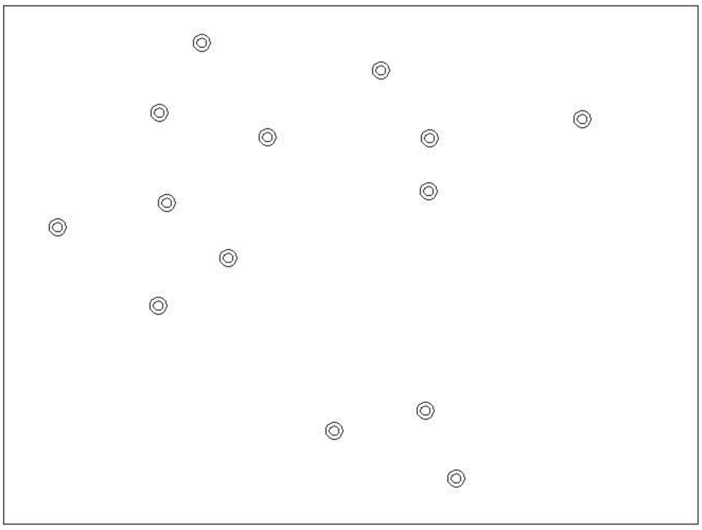
表 2　數學建模研究設計雙向細目表

建模過程＼認知過程	如何選取訊息	怎麼表徵訊息
理想化過程	活動A1	活動A2
數學化過程	活動A3	

表 3　活動問題與目的

活動	活動問題敘述	活動目的
A1	現在有一個客戶從師大分部訂購10個Pizza，你是訂購中心客服人員，你會請哪個門市外送Pizza給師大分部的客戶。如附圖1是台北市某Pizza連鎖店門市分布圖： a. 你（訂購中心客服人員）會請哪一個門市外送Pizza呢？爲什麼？ b. 如果此Pizza連鎖的店規：規定要30分鐘內送達，那麼你會請哪一個門市送Pizza呢？爲什麼？ c. 如果請最近的門市外送，你會請那個門市外送呢？你如何判斷是最近距離？	探討準教師在具體情境下如何選取訊息。 （a）開放的問題 （b）30分鐘限制（條件限制下） （c）考慮最近距離（給定條件下）
A2	a. 你會留下地圖上哪一些有用的訊息，以說明前一個活動中的三個問題？並將它繪製在下面空白的地方？ b. 你會給所繪製的圖哪些標示？並且說明一下。	探討準教師在具體情境下怎麼表徵訊息。
A3	a. 如果你是這個Pizza連鎖店的總經理，你會如何將附圖2規劃成若干外送區域？爲什麼要這樣劃分區域？ b. 如果客戶剛剛好在你劃分的區域邊界上，你會如何處理？爲什麼？ c. 兩個區域的邊界是什麼形式？直線？曲線？並且說明一下。	探討準教師在從真實模式至數學模式。 （a）探討如何發展模式。 （b）探討如何表徵模式。 （c）探討如何表徵模式。

附圖 1　台北市某 Pizza 連鎖店門市分佈圖



附圖 2　台北市某 Pizza 連鎖店各門市位置簡圖

單、討論錄音及上台講解錄影等各種方式來蒐集多樣的資料。

活動中透過活動單來蒐集準教師個別的資料，而且每一組提供一支錄音筆錄音來蒐集小組之間的討論。除此之外，並架設一台攝影機攝影準教師分組討論情形及上台發表的結果。

資料處理將所有蒐集相關文件掃描至電腦存檔，以方便資料搜尋以及引證。而課堂討論錄音及錄影除了以電腦檔案形式儲存外，並以逐字稿形式記錄以方便分析。因此，本研究資料蒐集包括準教師個人的活動單、課堂小組討論錄音及分組上台講解錄影等各種方式來蒐集多樣的資料，並以詮釋性研究的方法進行討論分析。

肆、研究分析與討論

一、影響準教師數學建模過程中形式化之認知因素

本節從認知的觀點分析準教師處理現實世界中真實情境問題的過程。由資料顯示，主要可以區辨出五個重要認知因素（參考表4），且準教師的表現又可分爲兩類（類型Ⅰ、類型Ⅱ）。以下依據準教師在數學建模活動中所蒐集之資料分析說明影響其形式化的認知因素。

表 4　影響數學建模認知因素

建模過程 \ 認知過程	如何選取訊息	怎麼表徵訊息
理想化過程	（1）提取經驗 （2）簡化與假設	（3）抽取物件
數學化過程	（4）物件轉化	（5）分析數學物件關係

（一）提取經驗

活動A1完全在具體情境中發展，以真實生活情境出發，提供真實的地圖與使用日常生活用語之問題。

第1組認為要將地區劃分，如此，外送人員較熟悉，外送較方便。第3組認為以最近的三間店（永和、師大、景美）考量，而且興隆店生意較差，所以請興隆店送。第5組考慮將區域劃分。我們可以發現這三組都以生活經驗做為思考真實情境問題的主要依據，他們從生活經驗中分析區域、時段及人力等具體因素做為解決問題的思維主軸。

第2組與第4組都在地圖上使用圓規作圓的方式來做決定和說明問題的處理方式。在他們的討論中，雖然曾討論到其他具體因素，但主要思考問題的方式仍是以數學工具做為分析具體情境。

從準教師一開始在處理具體的情境問題，可以區分出兩種類型：

類型Ⅰ：他們一開始討論哪個門市外送，在相互討論過程中，他們舉出了一系列要考慮的因素，大多是具體且複雜的因素。譬如，直接聯想到哪個門市比較適合，或考慮實際騎車的距離……等等。

類型Ⅱ：他們一開始先討論地圖上的外送Pizza的地點，然後以地圖上外送Pizza的地點，使用圓規畫圓，逐漸擴大圓。他們以數學的經驗或技巧來解決問題，其背後蘊含最近距離的想法。

比較兩個類型的異同，類型Ⅰ所提取的經驗主要以生活經驗為主，類型Ⅱ所提取的經驗主要以數學經驗為主。換言之，兩種類型的主要差異在於其所提取的經驗內容及技能。

（二）簡化與假設

活動A1之問題（a）以開放性的問題讓準教師探討情境，接著在問題（b）與問題（c）加入限制條件。設計這三個子問題從開放性的問題到有條件

限制的問題，其主要目的在引導準教師進行建模活動，從這過程中探討準教師如何進行建模。以下敘述研究發現：

類型 I 在問題（b）的條件限制下，他們開始注意時間的因素。他們開始考慮選擇比較近的門市都以交通條件為主。這裡以第1組準教師討論為例：

S1：景美的（店）我不知道在哪裡

S1：可是看地圖覺得好遠喔！到底真的是那麼遠嗎？

S1：因為你看師大店才這麼一段，然後景美

S3：差不多在哪裡？

S1：真的在那裡嗎？這樣子的話還蠻近的。

S2：你要看交通怎樣ㄟ

S1：交通的話

…

S2：師大店是比較近，可是遇到那種大紅綠燈，就是最後面那一個，那個就要等。然後景美那個是……

S1：景美？

S2：景美（店）就是也是直線

S1：嗯

S2：就是也是直線，就也是直線，轉左邊就到了！那個停的紅綠燈比較少，不是比較少

S1：比較快

S2：對啊！

S3：好啊！

在問題（c）中討論最近距離的時候，他們考慮交通、街道等具體因素（具體的環境因素），並以實際的行進距離來描述最近距離。他們在地圖上使

用折線、棉線、頭髮去測量距離，而其中有第5組想要使用電腦模擬計算，並說明其好處在於可同時考慮包含街道、交通等因素，以精確估算出距離與時間。

類型 I 經過問題（b）及問題（c）進一步反思生活中具體的經驗，將各種具體條件綜合討論，例如，交通的問題、城市街道，因而發展出使用道路路徑來描述距離。縱然是在平面地圖上處理，但由於具體因素太過於複雜且太過抽象讓準教師無法操弄，只能一直憑空想像，使得部分準教師甚至想要使用電腦來模擬計算（使用電腦計算出距離與時間）。

類型 II 經過問題（b）的條件限制下，他們加入了生活經驗來說明，強化了他們找最近的門市的想法，並分析問題中的關鍵因素。這裡以第2組的討論爲例：

S6：我覺得這邊應該要考慮紅綠燈、時段、人力分配、熱鬧程度

S5：考慮熱鬧程度的話，師大本部會比景美熱鬧

S6：對啊！所以我們要挑不熱鬧的地方～相對而言

S5：嗯！嗯！比較不熱鬧

…

S5：我根本不知道哪一家的人手比較多

S6：還有時段的問題！早上啊中午晚上啊！訂的量一定不一樣

S5：喔！對喔

S5：可是我們能考慮的只有交通跟熱鬧程度而已

在問題（c）中的討論，他們以目測及直線距離來描述最近距離，雖然他們同時有直線距離以及曲線距離的想法，但是，他們知道他們現在暫時不要考慮具體的因素或將道路視爲次要的因素。這裡以第2組準教師爲例子，他們進一步分析三個門市之間的關係，然後想到三點做中垂線區塊劃分。下面是他們

的討論：

S6：純粹考慮距離而言，好像可以

S6：我想到三點做中垂線區塊劃分……也是到三頂點等距離

S6：你在這裡一定是這一家

S6：我們利用那個簡單的方法試看看

S7：你說中垂線喔

類型Ⅱ在複雜的具體情境中，從問題（b）到問題（c）的過程，雖然還是會考慮紅綠燈和熱鬧程度等具體的因素，但最後仍以數學的距離觀念做主軸，將具體的條件暫時不考慮，做一些假設條件（假設純粹考慮距離）。他們將門市轉化成地圖上的點，然後發現三點之間中垂線的關係，逐漸進入問題簡化與假設條件的理想化過程。

比較兩個類型的異同，類型Ⅰ同時考慮許多條件因素，簡化問題的程度較弱，形成一個較具體的情境模式。類型Ⅱ能假設條件將問題簡化，逐漸進入問題簡化與假設條件的理想化過程，形成了一個比較理想化的情境模式。

（三）抽取物件

在活動A2中，要求準教師留下所需要的訊息，藉此來觀察在具體情境下，抽象化及符號化的複雜度。在所蒐集的資料中，經過分析發現，類型Ⅰ與類型Ⅱ有些相同的地方與相異的地方。以下分別從相同處與相異處做說明。

1.類型Ⅰ與類型Ⅱ的相同處

（1）保持門市相對位置：他們保持地圖上面門市的相對位置，例如，以描圖的方式，先以各組保留的門市個數統計，發現24位準教師中有2個人保留2個門市，11個人會保留3個門市，7個人會保留4個門市，3個人會保留5個門市，1個人會保留全部門市（參考表5）。

表 5　各組準教師所留下的門市之統計表

組別＼店數	2 個門市	3 個門市	4 個門市	5 個門市	全部保留
第1組	0	3	1	0	0
第2組	0	4	0	0	0
第3組	0	3	3	0	0
第4組	2	0	0	2	1
第5組	0	1	3	1	0
總人數	2	11	7	3	1

再以個別門市統計分析準教師所萃取的門市主要是哪一些。我們發現24個人全部會留下師大店與景美店，而有6個人留下永和店，有14個人留下興隆店，有4個留下木柵店的，只有1個人保留全部的門市（參考表6）。我們發現，大部分準教師會萃取訂購Pizza附近的門市；換句話說，他們會萃取問題相關的訊息，一些不相關的訊息大部分會排除，而且準教師大部分都會以局部的模式來處理這個具體問題。

表 6　依個別門市統計表

門市	永和店	師大店	景美店	興隆店	木柵店	更多
人數	6	24	24	14	4	1

（2）留下重要道路：他們會將一些道路留下來表示門市到客戶之間的距離，甚至有些人會考慮河流、紅綠燈等等具體物件。

（3）標示門市名稱：他們都以門市名稱代表門市。

我們發現準教師們所抽取的物件都差不多，無論一開始是否使用數學的工具。下面兩張圖分別是真實世界的地圖（如圖3）與準教師解決Pizza連鎖店

外送問題留下來的圖形（如圖4）。

圖 3　Pizza 連鎖店分布地圖

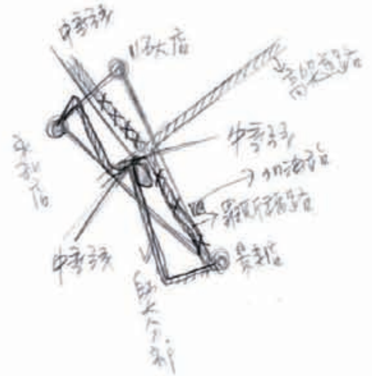


圖 4　準教師建構的情境圖示

比較地圖與他們所留下的圖形可以發現，他們都會萃取具體物件，會留下門市位置、重要的道路，以組成情境圖示，形成情境模式。

2.類型 I 與類型 II 的相異處

類型 II 特別描述具體物件之間的關係，不只是單純地簡化情境形成模式，他們可能會進一步地在模式上操作，例如，將3個門市視爲3個點，做兩兩之間的中垂線（參考圖5）。雖然類型 II 也會注意具體物件，但相較之下，類型 I 只注重物件的性質（參考圖6）。因此，將類型 II 形成的模式稱爲操作模式，類型 I 所形成的模式稱爲物件模式。

從以上比較兩個類型的異同，可以發現以下兩類的特徵：

類型 I ：在這些問題情境中，他們強調實際路徑及其他具體因素的交錯關係，因此從情境中抽取出來的物件，除了門市與外送地點之外，還有地圖上重要的道路，顯示仍在真實情境中思考問題。

圖 5　專注於物件操作

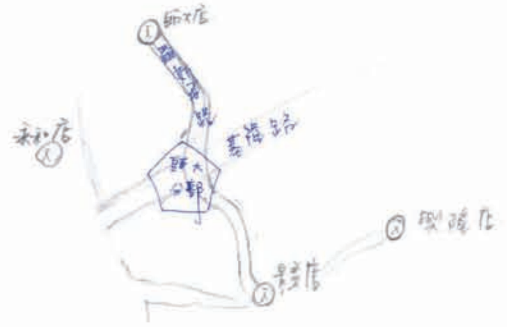


圖 6　專注於物件性質

類型Ⅱ：在這些問題情境中，他們以數學方式處理具體情境，因此從情境中抽取出來的物件只剩下門市與外送地點，而地圖上重要的道路被視爲次要的考慮因素，形成了一個比較理想化的情境模式。

（四）物件轉化與分析數學物件關係

在活動A3中，蒐集準教師如何從真實情境過渡到數學模式的資料，依據他們所發展出來的模式來進行分析。

類型Ⅰ所發展出來的模式：第1組想具體存在的街道來畫分區域，以考慮具體條件爲主（如圖7），在圖形中的線條是一些地圖上的道路，且將圖形不規則地分割成每個門市一個區域。第3組與第5組有使用數學的方法來劃分區域（圖8和圖9），但是，他們受到具體情境的條件和限制影響。第3組的想法是將圖形分成幾個區域，然後將整個圖形區分成四個部分，而這些邊界是部分門市之間的中垂線。第5組想像擴散的方式來畫分區域，然後以各個門市畫圓來形成區域的劃分。

類型Ⅱ所發展出來的模式：第2組與第4組將門市視爲點，使用數學工具來幫助他們解決問題，利用中垂線去劃分區域（如圖10和圖11），這是Voronoi圖的幾何表徵形式。

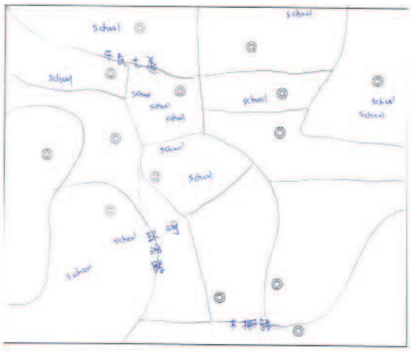


圖 7　活動 A3 第 1 組

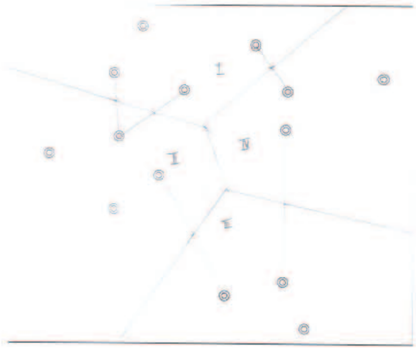


圖 8　活動 A3 第 3 組

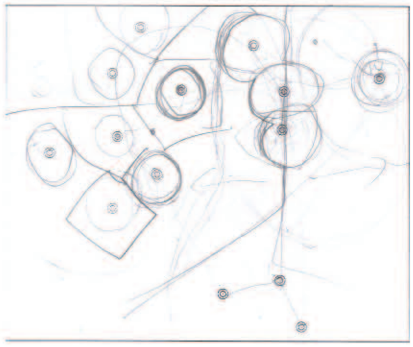


圖 9　活動 A3 第 5 組

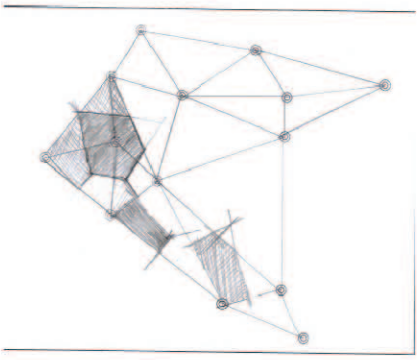


圖 10　活動 A3 第 2 組

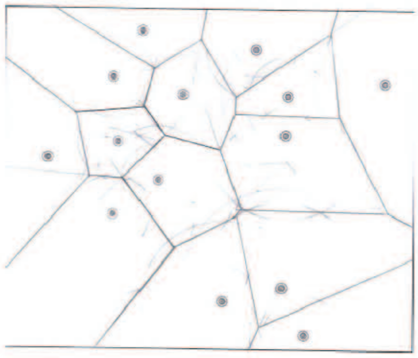


圖 11　活動 A3 第 4 組

類型Ⅰ所發展的模式著重具體情境的情境模式，並以具體的物件來表徵，類型Ⅱ所呈現的模式則是以幾何圖形來表徵（Voronoi圖之幾何圖形）。

接下來，藉由形成模式的過程比較類型Ⅰ與類型Ⅱ，分析兩種類型不同的認知因素。研究者發現以下兩個主要因素：

1.物件轉化

第1組一直著重具體情境，以他們劃分區域的方式，他們在這裡沒有引進數學的方法或連結數學的經驗。第3組與第5組在活動A3雖嘗試引進數學的方法來幫助他們解決問題，但還沒完全脫離具體情境，仍然考慮許多具體的條件，例如，第3組考慮每一區要負責差不多的區域，第5組認爲每個門市負責的區域是圓形的範圍。

第2組與第4組在活動A1中，對於最近距離的概念是直線距離，並因而激發他們使用直尺測量、做圓、甚至做中垂線等數學方法。雖然他們所萃取出來的物件還包含了一些具體物件，例如，門市、道路，但是在活動A3中，他們連結了這些數學的經驗，譬如，做圓或做中垂線的經驗是以點爲出發。因此，他們自然而然地將門市視爲點。

從以上分析比較，研究者認爲準教師能否將具體物件轉換成數學的物件，其最重要的關鍵之一在於與數學的連結或數學方法的使用，而另外一個關鍵則爲思考的關鍵因素，此二者使得準教師在數學與情境中形成拉鋸。

2.分析數學物件關係

第1組考慮門市之間的關係一直圍繞在具體的情境上，使用道路來劃分區域。第3組與第5組雖然有使用數學的方法來幫助解決問題，但是他們在考慮物件與物件的關係時，考慮的依舊是門市的性質，而不是當成數學物件的點來分析之間的關係，例如，第5組考慮平面上門市認爲每個門市負責一個圓形區域。

第2組將平面上的點看成一些三角形的頂點，因此，整個平面被分成一些不重疊的三角形組合，然後他們在每一個三角形內做中垂線劃分區域。第4組在平面上將相鄰的兩點做中垂線，然後慢慢修正所形成的邊界。他們將兩個點的中垂線視為區域劃分的邊界。而其中比較特別的一位準教師連結了程式設計的經驗，因而想要設計一個電腦程式來幫助他解決這個問題。

從以上這些分析比較，研究者認為當準教師的模式是一些具體物時，他們在思考物件之間的關係是以具體的條件或限制為主。相對地，將具體物件轉化為數學物件之後（類型 II 之準教師），分析數學物件的關係時，可暫時不考慮具體條件，單純地討論數學物件之間的關係，例如，三點之間的中垂線，最後形成一個數學模式。

二、準教師數學建模過程中形式化的機制

依據理論架構之數學建模過程，形式化的過程包含了理想化與數學化，因此，準教師必須從複雜情境中進行理想化以形成情境模式，再透過數學化將情境模式轉化至數學模式。以下將討論數學建模過程中的機制。

依據準教師從複雜情境出發所發展出來的模式，可將準教師處理具體問題形成模式，主要分成兩個類型的模式：

（1）物件—模式（Object-Model）：其組成元素之間的關係是考慮交通（真實條件），著重於物件性質。例如，類型 I 發展出的真實模式，其使用的的表徵物為具象表徵，包含生活經驗、道路、區域……等等。符合Piaget經過「經驗抽象」所產生的認知結果，因此，此模式比較難發展出較抽象的數學概念。

（2）操作—模式（Action-Model）：其組成元素之間的關係是考慮直線距離為主，並理想化真實情境到視為平面，著重於物件操作，例如，類型 II 發展

出來的真實模式會使用數學工具（使用圓規做圓、做中垂線），以圖像表徵為主，符合Piaget經過「擬經驗抽象」所產生的認知結果，利用數學工具進行物件操作。因此，他們逐漸發展了潛在的數學概念，但未脫離情境完全發展到數學模式。

從數學的觀點來討論，從複雜情境發展到數學模式（如圖12），物件—模式可以看成較接近複雜情境的模式，此模式的特性會比較注重具體物件的性質（條件），而操作—模式可以看成比較接近數學模式的模式，此模式開始注意物件之間的關係，是比較抽象的。

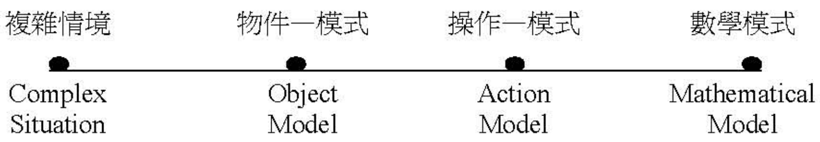


圖 12　複雜情境到數學模式之間的二種模式

以模式的類型來分析準教師數學建模活動，兩種類形的發展歷程為以下兩個截然不同的歷程（參考圖13）：

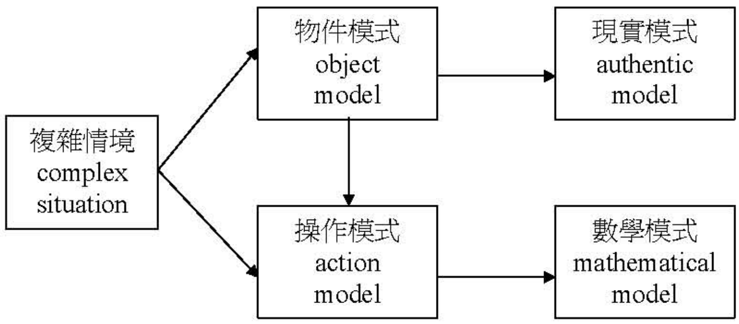


圖 13　準教師數模式轉化歷程圖

類型Ⅰ：複雜情境→物件—模式→現實模式。

類型Ⅱ：複雜情境→物件—模式→操作—模式→數學模式　或

複雜情境→操作—模式→數學模式

沒有準教師能夠直接將物件模式或情境模式轉化爲數學模式。

以上的研究分析已探討準教師發展模式之歷程，以下將綜合影響準教師數學建模形式化之認知因素與準教師發展模式之歷程，討論數學建模過程中理想化過程與數學化之機制。

（一）理想化過程

準教師從具體複雜的情境中接受訊息（文字與地圖）時，會提取他們的經驗（生活或數學），從而激發他思考這個情境中的關鍵因素。他們思考關鍵因素，並經由考慮具體條件限制，再反思這個情境的關鍵因素，而且會經由強調或忽略抽取出一些物件，然後簡化問題，最後形成他們處理複雜情境的模式。影響理想化過程的認知因素，爲以下幾項：

（1）經驗提取：準教師在思考情境問題中，其所提取的經驗會直接影響他所考慮的關鍵因素。類型Ⅰ以生活經驗爲主，所以激發他們思考一些具體的因素，類型Ⅱ以數學經驗爲主，所以激發他們思考數學的因素。

（2）簡化與假設：準教師發展出最初步的模式，會依據他所思考的關鍵因素來建立模式，而模式簡化之程度與他們所思考的關鍵因素數量相關，考慮的因素愈多，則所形成的模式愈複雜。類型Ⅰ同時考慮許多條件因素，簡化問題的程度較弱，所形成的模式比較具體。類型Ⅱ能假設條件假設將問題簡化，逐漸進入問題簡化與假設條件的理想化過程，形成了一個比較理想化的模式。

（3）抽取物件：準教師會從真實情境中抽取重要的訊息，以組成初步的模式，而初步的模式的抽象程度與他們所提取的經驗以及思考的關鍵因素相關，其所考慮的因素爲具體的因素，則所抽取的物件愈具體。但以抽象的點或

線來描述情境，不表示他們完全丟掉具體情境，他們依然會使用抽象的物件來詮釋真實情境。類型 I 思考的關鍵因素為具體因素，物件的抽象程度較弱，都使用門市（圓圈）與街道等具體物件。類型 II 以數學經驗為主，並簡化思考關鍵的因素，物件的抽象程度較強，可以使用點來描述門市，並以尺規做圖處理問題。

由兩種類型處理複雜具體情境問題的過程，經過整理分析後，可以一個歷程來說明：準教師從具體複雜的情境中接受訊息（文字與地圖），會提取他們的經驗（生活的或數學的），而激發他思考這個情境中的關鍵因素（參考圖 14）。

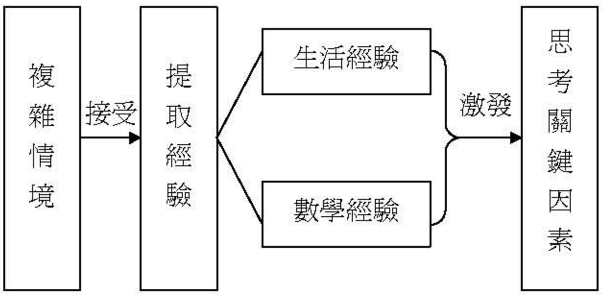


圖 14　準教師思考具體情境的歷程（Part I）

從準教師處理具體問題的過程中，比較兩種類型發現，準教師簡化問題與形成模式的歷程（參考圖15）：準教師思考關鍵因素，經由考慮具體條件限制，再反思這個情境的關鍵因素，並且經由強調或忽略抽取出一些物件，然後再形成簡化問題，最後形成他們處理複雜情境的模式，著重物件性質的物件模式或物件操作的操作模式。準教師簡化問題與形成模式的過程，兩種類型主要的差異即在於考慮的因素的複雜性。

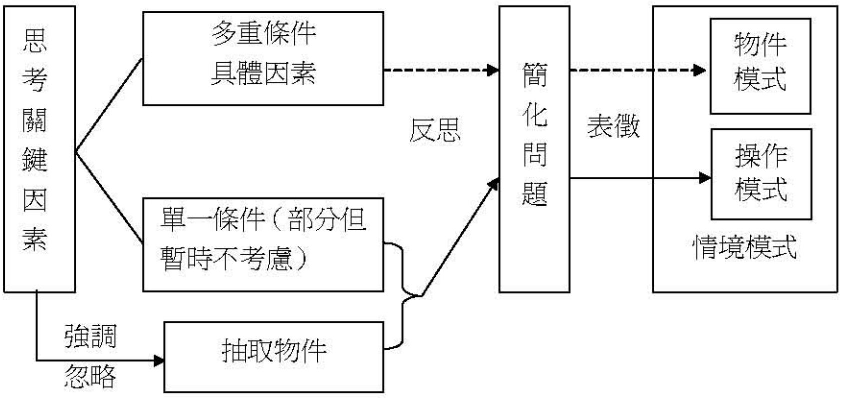


圖 15　準教師思考具體情境的歷程（Part II）

（二）數學化過程

準教師會連結數學經驗，將真實世界中的物件轉換為數學物件，再經由分析物件之間的關係，形成數學模式。相反地，準教師如果一直考慮具體的條件與經驗，他們會發展出複雜情境的現實模式，而不會往數學模式發展。影響數學化過程的認知因素，為以下幾項：

（1）物件轉化：是指將情境模式中的物件（或組成元素）轉換視為數學物件，亦即當準教師在處理問題時，會將物件視為數學元件，不同時具有情境的特性與數學特性，僅在詮釋真實情境時才會賦予情境的特性。而在研究中發現，準教師能否將具體物件轉換成數學的物件，其最重要的關鍵在於與數學的連結或數學方法的使用。

（2）分析數學物件關係：是形成數學物件關鍵的步驟之一，準教師必須透過處理或分析數學物件，才能形成有系統的數學模式。而準教師在分析數學物件的關係時，他們的認知特性是可暫時不考慮具體條件，只單純地討論數學物件之間的關係，形成一個數學模式。

從準教師處發展模式的過程中，可以發現準教師轉化模式的歷程（參考圖16）：若準教師著重生活經驗（或具體條件）時，他們形成的模式會是一個較複雜且具體的模式，我們稱之為「現實模式」（authentic model）。若準教師能連結數學經驗，將真實世界中的物件轉化為數學物件，再經由分析數學物件之間的關係，然後形成「數學模式」（mathematical model）。若準教師連結了程式設計的經驗，有可能會發展出模擬模式，雖然在本研究中並無實際證據，但在準教師的討論中可以發現具有此趨勢。

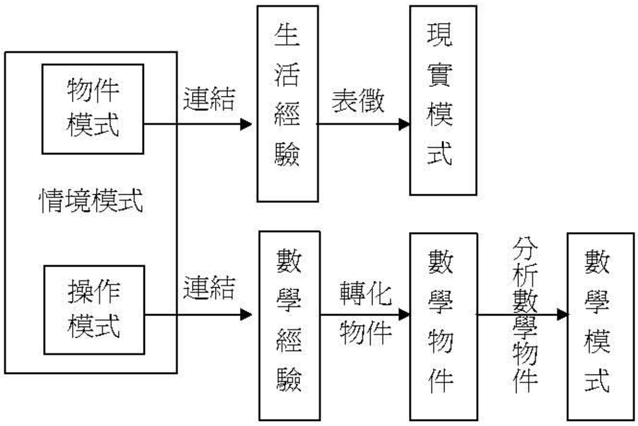


圖 16　準教師轉化模式的機制

伍、結論與建議

本研究目的即在分析與瞭解準教師數學建模之形式化歷程，針對本研究所提出的研究問題，以下依據實際發現以及綜合討論的結果提出結論。

一、數學建模歷程的認知因素與表徵系統

依據Kaput（1989）的建構情境模式，認知表徵系統爲基本理論架構，可以將建模過程視爲從具體情境中建立內在概念系統（模式）的認知過程。通常在處理一個複雜的情境時，可能會用多種不同的表徵來表徵情境，且在處理這些表徵的認知過程中，主要包含了二個部分：

（一）個體透過解析情境外在表徵轉化成爲表徵之內在認知結構，再經由表徵詮釋建立此情境的認知表徵，在建模歷程中形成情境模式。

（二）透過數量形之樣式特徵喚起認知表徵相關的數學概念與技能，成爲建模過程的數學結構，然後，個體將其投射於一個外在的形式表徵（模式）用來表徵情境。

整合Kaput建構模式之認知表徵系統的觀點，將研究發現中所歸納出的五個影響準教師數學建模歷程之認知因素形成一個認知系統（參考圖17），以下個別描述每個認知因素在認知系統中的意義與功能：

（a）提取經驗：表示個體在解析（或思考）情境問題，而研究中發現其所提取的經驗會直接影響他所考慮的關鍵因素。

（b）簡化與假設與（c）抽取物件：表示個體在建立情境模式，而這兩個因素通常會同時進行且互相影響。以下分別敘述其特徵：

簡化與假設：準教師依據他們所思考的關鍵因素來簡化情境與假設條件以建立情境模式，簡化的程度與他們所思考的關鍵因素數量相關，考慮的因素愈多，相對地，假設條件也愈多，則所形成的模式愈複雜。同時考慮許多條件因素，簡化問題的程度較弱，所形成的模式比較具體。

抽取物件：從真實情境中抽取重要的訊息以組成模式，是建模過程中必經的歷程，而模式的抽象程度則與他們所提取的經驗以及思考的關鍵因素相

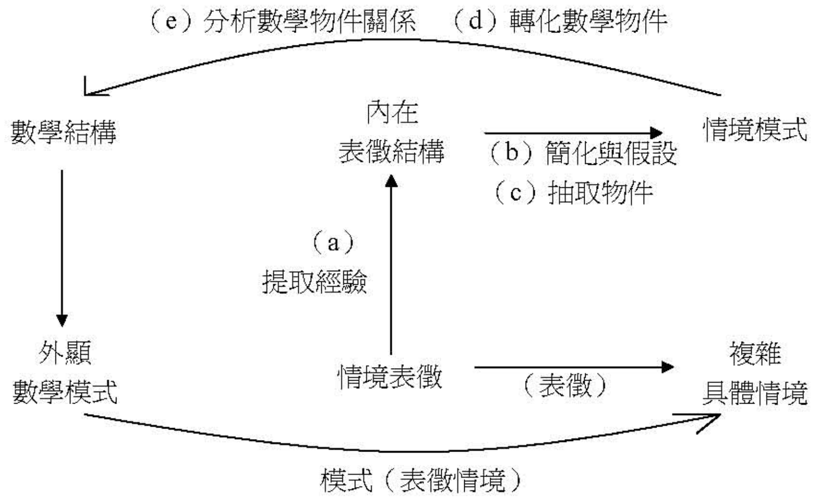


圖 17　數學建模之認知表徵系統

關，其所考慮的因素為具體的因素，則所抽取的物件愈具體。但以抽象的點或線來描述情境，不表示他們會完全丟掉具體情境，他們依然會使用抽象的物件來詮釋真實情境。

（d）轉化數學物件：表示個體重新表徵真實情境，並以數學的物件表示。在研究中發現，準教師將所形成之模式中的物件（或組成元素）轉換視為數學物件，亦即當準教師在處理問題時，會將物件視為數學物件，且以數學結構為主要考量，他們可能會暫時脫離具體情境之限制，僅在詮釋真實情境時，是才會賦予情境的意義。

（e）分析數學物件關係：表示個體在建構數學模式。而在研究中發現，準教師分析數學物件關係是形成數學物件關鍵的步驟之一，準教師必須透過處理或分析數學物件，才能形成有系統的數學模式。而準教師在分析數學物件的關係時，他們的認知特性是可暫時不考慮具體條件，只單純地討論數學物件之間的關係，形成一個數學模式。

在整個數學建模歷程中，上述的五個認知因素具有一致性（cognitive unity）的特性，從一開始的提取經驗到最後的轉化數學物件與分析數學物件關係，準教師所思考與討論的方向顯示出其認知的一致性，而非跳躍性的思維。

二、數學建模之師資培育課程建議

數學建模是重要的數學能力之一，因此，在師資培育課程中需提供中學教師的數學建模課程，從高觀點數學連接中學數學的數學學習，以強化他們的數學建模的知識與經驗。根據本研究的結果，針對數學建模之師資培育課程提出以下三點建議：

（一）引導簡化情境

研究結果顯示，準教師要從複雜的情境發展數學概念並不是那麼容易的，大部分的準教師在活動中的表現都是如此困難與複雜，更不用說希望小學生、中學生在建模活動中來進行複雜情境的問題。而從數學建模歷程的認知特性顯示，建模者的數學建模歷程發展具有一致性，因此，在數學建模活動過程中須適時地引導建模者將具體的情境簡化，以避免建模者陷入愈來愈複雜的認知負荷。所以，教師的角色不是僅以後設的角度來監控建模者的建模歷程，更需在教學中適時地引導建模者假設條件與簡化情境。

（二）引入數學經驗

研究結果亦指出，準教師從具體情境中出發，在第一時間，他們會提取其經驗，包括生活經驗與數學經驗。另外，建模者在形成自己的情境模式後，將其轉化爲數學模式又是學生困難的作業之一，而其關鍵就在於與數學的連結。因此，教師在布置具體真實的情境時，需要考量建模者的生活經驗以及數學經驗，甚至可以提供數學工具（例如，數學軟體、電腦繪圖工具……等

等）。

（三）電腦模擬做為操作模式

在本研究中顯示，準教師建模過程中需要透過物件的操作，他們從複雜情境中建立出操作模式，再朝向數學模式發展。研究者認爲，電腦模擬可以提供建模者操作物件之輔助，讓建模者能著重於物件的操作。因此建議於數學建模活動中，可提供適當的數學軟體，以方便進行電腦模擬。

三、未來研究建議

本研究主要在分析與瞭解準教師數學建模形式化的細部歷程，包含理想化與數學化之引模過程。因此，研究範圍與結果有所限制，從研究過程與結果中引起了我們需要更多關注的問題做爲未來研究建議：

（一）如何設計探索模式的活動

一般的數學家或科學家在建立數學模式之後，還是會留在數學世界來分析模式的性質，而且會去詮釋模式在問題中的意義。雖然在這個研究中發現準教師已經建立初步的Voronoi圖的模式，但是，本研究中的準教師在這些活動中並不會立即地分析數學模式的性質，由此可知，準教師沒有數學建模的整體概念，尤其是模式的詮釋，更是他們的困難點。因此，將來在進行數學建模活動時，如何設計數學建模過程之中探索模式及其意義的詮釋活動，將是下一個重要的研究問題。

（二）如何使用電腦科技於建模活動

在數學建模歷程中，準教師在複雜的情境中比較會發展出理想化的模式，並不是可以自然地朝著數學化發展。而連結理想化與數學化之關鍵因素是數學工具，它是一個中介工具（mediating tool），可以提供機會讓學生操作及注意物件之間的關係。電腦化教學環境常常被使用來當成中介工具，讓學生能

夠從具體複雜的情境中，藉由電腦化教學環境來進行情境抽象，然後逐漸地進行數學抽象，以幫助學生從複雜情境中學習數學概念。因此，如何在數學建模教學過程架設鷹架，或如何利用電腦科技來幫助建模，都是值得進一步研究的問題。

致謝

本研究的完成承蒙行政院國家科學委員會專題計畫經費補助（計畫編號：NSC95-2522-S-003-005、NSC96-2922-I-003-009）特此感謝。同時，要特別感謝審查者給予的建議，以及論文繕寫的寶貴意見。

參考文獻

楊凱琳、林福來（2006）。探討高中數學教學融入建模活動的支撐策略及促進參與教師反思的潛在機制。**科學教育學刊，14**（5），517-543。

鄭玉雯（2004）。**九年一貫課程數學領域「連結」主題及教學落實情形之初探**。國立臺中師範學院數學教育系碩士論文，未出版，臺北。

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modeling in mathematical education–Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149-171.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1998). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods* (3rd ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Burkhardt, H. (1981). *The real world and mathematics.* Scotland: Blackie and Son.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 27-41). Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer.

Kaiser, G. (2005). Mathematical Modelling in School – Examples and Experiences. In H.-W. Henn, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematikunterricht im spannungsfeld von evolution und evaluation. Festband für Werner Blum* (pp. 99-108). Hildesheim: Franzbecker.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of Algebra. In S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of Algebra* (pp. 167-194). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lin, F. L., & Yang, K. L. (2005). Distinctive charateristics of mathematical thinking in a non-modeling friendly environment. *Teaching Mathematics and its Applications, 24*, 97-106.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mooney, D., & Swift R. (1999). *A course in mathematical modeling.* Washnigton, DC: The Mathematical Association of America.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Niss, M. (1989). Aims and scope. In W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G.

Kaiser-Messmer, & L. Profke (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 22-31). Chichester, England: Ellis Horwood.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. Retrieved October 15, 2004, from http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies _and_the_learning_of_mathematics.pdf

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook on research of mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age.

Treilibs, V. (1979). *Formulation processes in mathematical modelling*. Unpublished master's thesis, University of Nottingham, Nottingham.

Treilibs, V., Burkhardt, H., & Low, B. (1980). *Formulation processes in mathematical modelling*. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Warzel, A. (1989). General theory of modelling and theory of action-a solution for the educational situation at school?. In W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G. Kaiser-Messmer, & L. Profke (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 121-126). Chichester, England: Ellis Horwood.