

師資培育數學課程對國小教師數學 教學意象影響之研究

徐偉民* 張國綱**

摘 要

本研究針對45位暑期進修的國小教師，採用個案研究法，以探究師資培育「普通數學」課程對現職教師數學教學意象的影響。研究結果發現，參與教師在研究前，具有「引導發現理性邏輯」的數學教學意象，偏向靜態穩定的數學知識觀，係從理論的觀點來看數學的學習，且大多有負面的數學學習經驗。在經過師資培育的普通數學課程學習後，多數教師經歷和以往不同的數學學習經驗和體會，而調整了原有對數學知識的觀點，且對互動理解的數學學習有具體的理解，進而形成「探究思考走出迷宮」的教學意象。本研究發現，學習經驗的改變可能是使教師數學教學意象移動的關鍵，這樣的發現也呼應了學習經驗是教學意象發展基礎的主張。

關鍵詞： 個案研究、國小教師、數學教學意象

* 徐偉民，國立屏東教育大學數理教育研究所助理教授
電子郵件：ben8535@mail.npue.edu.tw

** 張國綱，國立屏東教育大學應用數學系助理教授
電子郵件：chang@mail.npue.edu.tw

投稿日期：2010年10月7日；修正日期：2010年11月15日；接受日期：2010年12月13日

Contemporary Educational Research Quarterly
December, 2010, Vol.18 No.4, pp. 41-77

The Influence of Mathematics Curriculum of Teacher Education on the Mathematics Teaching Image of Elementary School Teachers: A Case Study

Wei-Min Hsu* Koukung Chang**

Abstract

In the past, many studies show the complexity of forming the teacher's personal teaching image as well as the influence of the teaching image on the teacher's teaching in the class. However, most of those studies do not scrutinize the influence of teacher education curriculum on teacher's teaching image. Therefore, this study attempts to understand how the General Mathematics Course (GMC) of teacher education has influence on the mathematics teaching image (MTI) of the elementary school teachers. In this study the researchers had a follow-up examination of the MTI changes of teachers before and after participating in GMC. The results of this study show the participant teachers turned their MTI from

* Wei-Min Hsu, Assistant Professor, Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Pingtung University of Education
E-mail: ben8535@mail.npue.edu.tw

** Koukung Chang, Assistant Professor, Department of Applied Mathematics, National Pingtung University of Education
E-mail: chang@mail.npue.edu.tw

Manuscript received: Oct. 7, 2010; Modified: Nov. 15, 2010; Accepted: Dec. 13, 2010

negative and passive to positive and active images when they completed the GMC. It also shows that the different mathematics learning experience in GMC may lead to changes of in-service teachers' MTI. The findings of this study not only have implications for the course design of the teacher education programs, but also provide suggestions for in-service teacher training courses.

Keywords: case study, elementary school teacher, mathematics teaching image

壹、研究緣起與目的

臺灣近10年來的數學課程，歷經了數次的改革，包括從學科本位、學生本位到能力本位的發展歷程（鍾靜，2005），從強調知識的獲得、知識建構轉向強調能力培養，再到目前計算與理解並重的數學課程與教學階段。其中，數學課程的改變，雖然直接影響學生數學學習的焦點與結果，但是，教師對於課程的詮釋、轉換與實施，才是影響學生數學學習的關鍵（Stein, Remillard, & Smith, 2007）。教師的數學教學表現，不僅關係著數學課程改革之成敗，也影響未來科學人才的培育。

但是，教師的數學教學表現是一個複雜的內在思考與外在表現交互作用的結果（Artzt & Armour-Thomas, 2002）。教師教學思考的研究指出，教師的教學思考與決定結合了教師的經驗、教學理念、學生的表現，以及多種情境因素相互作用的結果（Clark & Peterson, 1986）；從教學實施的觀點來看，教師的教學表現受到自己的知識和信念、學生的表現和反應，以及教材內容等多因素的影響（Henningsen & Stein, 1997; Tarr et al., 2008）。這些都說明了教師教學表現的複雜性。

爲了要瞭解教師教學表現背後的複雜因素，Elbaz（1983）提出了「教學意象」（teaching image）的概念，從教師個人對教學整體與隱喻的意象，來瞭解其課堂上的表現與決定。在教學意象的概念提出之後，引發了一系列以現職或職前教師爲對象，採用質化研究的取向，來瞭解教師所具備的教學意象，並探討教學意象和教師教學行爲之間關聯的研究（陳國泰，2000；Bullough, 1992; Calderhead & Robson, 1991; Clandinin, 1986; Johnston, 1992; Lin, 1994）。結果發現，不論是職前教師或現職教師，其教室內的教學思考、決定和表現，均爲其本身具備的教學意象所影響。而個人教學意象的形成，過去的學習經驗

遠大於師資培育課程的影響，因此，相關研究都對師資培育課程的規劃和實施提出建議，希望藉由師資培育課程的實施，來挑戰或改變學生因過去學習經驗而形成的負面教學意象。然而，卻少有研究從具體師資培育課程的實施，來檢視對教師教學意象發展的影響，再加上過去研究者對意象的意義描述中，並未明確指出意象所涵蓋的向度 (Clandinin, 1986; Elbaz, 1983)，使其和信念、情感和價值等名詞相互重疊，不易區分。因此，本研究希望釐清教學意象的意義，並在呼應過去相關研究的建議下，探討師資培育課程的實施對教師教學意象可能的影響，擴展教學意象的研究面向，並瞭解師資培育課程可能扮演的角色。

雖然數學教學在數學教育改革的過程中，一直是受到關注的焦點，不僅有許多關於數學教學的標準與主張被提出 (Kilpatrick & Silver, 2000; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1991, 2000)，也引發了許多研究開始檢視教師的數學教學表現 (Ross, McDougall, Hogaboam-Gray, & LeSage, 2003; Silver, Mesa, Morris, Star, & Benken, 2009)。但是，過去的研究並未以數學教學意象為主題進行探討。因此，綜合教學意象對教師教學的關鍵影響、相關研究對師資培育課程提出的建議，以及數學教學意象主題的缺乏，本研究決定以數學教學意象和師資培育的數學課程為主題，希望達成以下三個目的：

- 一、瞭解國小教師在修習師資培育數學課程前所具備的數學教學意象。
- 二、分析國小教師在師資培育數學課程中的表現，瞭解師資培育數學課程對教師數學教學意象可能產生的影響。
- 三、瞭解國小教師在修習師資培育數學課程後數學教學意象的轉變。

上述的數學課程，是指國小師資培育課程中「普通數學」的課程。普通數學是國小數學教學領域的必修科目之一（另一個必修科目是國小數學教材教法），目的在於充實職前教師之數學基本能力，具備正確的數學概念，以勝任

國小數學的教學。相較於數學教材教法，普通數學較著重在數學知識的基本概念，而且學習的範疇也超過國小數學概念，包含了集合函數、邏輯、基礎數論等單元（普通數學編輯小組，2000）。該課程通常是非數理科系職前教師在進入教學現場前，最後修習數學課程和獲得不同學習經驗的機會，這也正是本研究選擇普通數學課程的原因。

貳、文獻探討與啟發

一、數學教學意象的意義與內涵

由於過去的研究缺乏數學教學意象的探討，因此，本研究將從過去對於教學意象的定義，以及數學教學的相關主張，提出數學教學意象的定義。在教學意象的定義上，Elbaz（1983: 254）認為，意象是一種「簡短的、描述的、甚至有時是一種譬喻式的敘述」。這個意象的敘述，是個人過去經驗動態發展的結果，是在社會互動的過程中，逐漸修正與形成的。換言之，意象是結合個人的情感、價值、需求與信念的整體圖像。Clandinin（1986: 166）定義意象是「……個人實務知識中一個個人的、後設的、組織的概念，而實務知識則是在個人具體的經驗中所發展而成的知識體系。在現場實務中，可以發現個人意象的表達，而且也是個人接納外在經驗的基礎」。這裡所指的個人意象，是過去經驗的組織與再組織，同時是一個連續、動態、理論與經驗辨證之後所得的結果，包含了情感與態度的成分。Lin（1994: 738）對意象的定義是，「教師所具備的教學信念、價值和知識，及其對於身為教師，本身對於這個角色的看法」。Weber與Mitchell（1996）認為，意象是根據過去的經驗，經過重新詮釋和賦予意義後，所形成的心理表徵（*mental representation*）。綜上所述，每位學者提出的定義均不盡相同，但卻都指出個人的教學意象是以過去的經驗為基

礎（學習經驗和專業經驗），包含了情感、價值和信念，並在動態發展的歷程中，形成對於教學的整體圖像。

意象的定義和情感、價值與信念都有所重疊。從Philipp（2007）針對情感、價值和信念的差異之說明可以瞭解，三者主要的差異在於具備認知成分的多寡（信念的認知成分較多）、改變速度的快慢（情感的改變速度較快），以及受脈絡影響的程度（價值較不受到脈絡的影響）三方面。但意象除了包含情感、價值和信念之外，更強調經驗是意象形成與發展的基礎。再從《牛津字典》和《韋氏大辭典》對意象的定義來看，意象是個體對於某種事物產生的心理圖像或表徵。因此，數學教學意象可以指「教師個人對於數學教學的心理圖像」。而此圖像在過去由於對數學知識觀點的改變（Bishop, 1988; Sfard, 1998）、學生學習歷程觀點的改變（NCTM, 2000; Willoughby, 2000），以及教師教學角色的改變（Anderson, 2003; Kilpatrick & Silver, 2000），而有了很大的不同。因此，本研究根據相關文獻和字典對意象的定義，以及意象的獨特性，將數學教學意象定義為：「教師個人對於數學教學的心理圖像，此圖像是結合教師對於數學知識的觀點和數學學習的觀點所形成的整體圖像。而個人的數學學習經驗，是形成與發展這個心理圖像的基礎」。其中，個人過去的數學學習經驗是形成對於數學知識和數學學習觀點的基礎，而這兩方面的觀點則綜合成教師個人對於數學教學的整體心理圖像。這個定義呼應了過去研究主張經驗是意象形成與發展的基礎，同時也將做為瞭解國小教師數學教學意象的依據。

二、教學意象的相關研究

過去教學意象的研究，探討的是整體教學意象的來源和對教學的影響，並未針對某一領域的意象進行探討，因此，本研究希望從過去相關的教學意象研究中，得到以數學教學意象和師資培育課程為主題的啟發。

（一）職前教師教學意象的研究

以職前教師為對象的研究，最主要的目的在於瞭解職前教師教學意象的內容與來源，以及師資培育課程對教學意象形成的影響程度。Calderhead與Robson（1991）針對12位職前教師，歷經一年的時間，採用訪談、觀賞教學錄影帶，並對錄影帶內容提出評論，結果發現，每位職前教師在進入師資培育機構前，已經當了數千個小時的「觀察學徒」，對於教學已經持有特定的教學意象。這些意象大多源自以往當學生的經驗，而且會強烈地影響他們對於課程與教學實務的詮釋。在以往學校學習的經驗中，職前教師可能會發展出兩種不同的教學意象，亦即如果教師對學生沒耐心、大聲咆哮，便會發展成負面的教學意象；相反地，如果教師讓教室的學習變得很有趣、能接受學生的困難，並且給予耐心的指導，則會發展成正面的教學意象。由於正面或負面的教學意象，包括了教師如何看待自己在教學中扮演的角色、對學科的看法，以及對學生學習的觀點，因此，師資培育機構應該思考如何設計課程或活動，來挑戰、甚至改變學生已有的或負面的教學意象。

Johnston（1992）透過訪談和教學觀察，瞭解兩位職前教師教學意象的來源。結果發現，即使兩位職前教師在師資訓練過程中都上相同的課程，也有類似的背景，但卻仍然發展出各自獨特的教學意象，而這獨特的教學意象是從他們以往的學校經驗中所演化而成，並且是決定他們教室行為的主要因素；Lin（1994）針對兩位幼教職前教師進行參與觀察和訪談，結果發現，儘管兩位職前教師在大學期間選修相同的課程，有相似的背景與教學經驗，也面對著相同年齡的兒童，但卻發展出不同的教學意象，而且根據兩人本身的教學意象，做出不同的課堂決定。兩位職前教師的教學意象，來自於個人與專業經驗兩個層面，包括大學的相關課程、實習輔導教師的影響、個人的信念、對於學科內容教學的看法，以及其他重要他人（家人、實習指導教授）等因素的影響。

從上述研究可以瞭解，職前教師的教學意象源自於個人學習與師資專業的經驗，其中，個人學習經驗的影響遠大於師資專業經驗，甚至是決定教學表現的關鍵。

（二）初任教師教學意象的研究

以初任教師為對象的研究，除了要瞭解初任教師所具備的教學意象外，更希望去探討初任教師在進入教學現場之後，原有教學意象的發展與轉變。**Bullough**與**Knowles**（1991）針對一位初任教師進行一年的觀察、訪談與教學日誌資料的蒐集，並以隱喻式的意象來探討其對於教師角色的思考與轉變。個案教師對教學角色的譬喻是「教師即養育者」，認為教學是父母教養孩子的延伸，所以，教師花很多的時間在關心學生與設計課程上，並以正向和溫暖的方式對待學生，積極地尋求學生的參與和投入。後來，受到學生的背叛（劃破她的汽車輪胎）、家長的壓力（抱怨教師上的語言課程內容不適當），以及自己教學技巧熟練等因素的影響，她逐漸改變了原先對於自我角色的認定。**Bullough**（1992）以兩位英語初任教師為個案，透過文件的蒐集、觀察與訪談，瞭解兩位教師對於教學和教師角色的觀點。結果發現，初任教師受到現場脈絡和個人因素的影響，而決定其教師教學意象的發展。例如：一位個案教師受到合作輔導教師的影響，以及對教師角色的定位，逐漸確定自己的教學意象是「教師即農夫」，並以此意象來進行課程的安排和教學。

陳國泰（2000）以三位初任教師為對象，在兩年的研究歷程中，發現三位初任教師均受到本身教學意象的指引，決定了班級經營與教學行為。例如：一位個案教師具有「教室如家」、「教學應該是活潑、有趣且有效的」等教學意象，所以，在課堂上特別營造活潑、溫馨的教學氣氛。由此可見，教師的教學意象有些是因為早年的生活經驗而形成（如「教室如家」），有些是在師資培育課程中產生（如「把所有學生帶上來」），還有許多則是因現場教學經驗的影

響，而改變原有的教學意象（如「以大部分學生為重」）。

初任教師的研究，除了說明教師教學意象的發展性和變動性外，也說明師資培育課程和現場教學經驗對教師教學意象的影響。尤其是現場教學的經驗，會使教師修正或改變原來在師資培育課程中所建立的教學意象雛形。

（三）有經驗教師教學意象的研究

針對有經驗教師的研究，目的是在瞭解教學意象對於教學實務影響的程度與扮演的角色，同時探討教學意象的本質。Elbaz（1983）以一位有10年教學經驗的英文教師為對象，透過深度的晤談與觀察，結果發現，個案教師的實務知識包括內容（content）、導向（orientation）和結構（structure）三種類別。其中，結構是實務知識的核心，包含了實務的規則、原則以及意象三個層面；「規則」是指處理教室或教學特殊情境時所採用的方法或策略，是簡短且明確的敘述；「原則」是指採用此種方法或策略的原因和目的，是較廣、較多涵蓋性且較不明確的敘述；「意象」是最不明確且涵蓋性最廣的項目，它包含了教師的情感、價值、需求和信念，並以一個隱喻的敘述來說明教師對於教學的理念。而意象是瞭解教師教學行動的關鍵，它會直接影響教師處理現場教學問題所採用的方法。

Clandinin（1986）針對兩位在幼稚園及小學教學超過10年的教師，進行一年以上的教室觀察與訪談。結果發現，教學意象是連結教師個人生活與教育專業經驗而成的結果。其中一位個案教師的教學意象來自於專業的經驗和訓練，以及個人以往的學校和生活經驗等；因為她的教學意象為「教室如家」，所以她的教學思考和行動都受到此意象的指引。教師的教學意象，不但指引著教室內的思考與行動，而且是過去經驗的組織與再組織。教師的教學意象源自於過去的經驗，表現在現在的思考與行動，引導著未來的行動與方向，是一個連續、動態、理論與經驗辨證之後所得的結果。Johnston（1990）針對六位中

學教師，透過訪談和書寫的回饋，探討教學意象對於課程決定的影響。結果發現，教師的實務知識來自於個人的生活經驗和教學專業經驗，而且個人實務知識中涵蓋了許多的意象，包括教學的意象、學校的意象、學科的意象等。其中，教學的意象是影響教師課程決定最關鍵的因素，而意象除了是過去經驗圖像的描述外，更是一種思考的方式、一個創造與建構未來教學和課程的基礎。

上述研究除了指出教學意象源自於個人與專業的經驗，以及對於教學表現的關鍵影響外，更指出教學意象的本質是以經驗為基礎，而且是一個不斷變動與成長的有機體。

三、數學教學意象的樣貌和研究的啟發

從本研究對數學意象的定義來看，要先瞭解教師對於數學知識的觀點、對於數學學習的觀點，才能拼湊出教師對於數學教學整體的「心理圖像」，而且這個圖像的形成與發展，是以經驗為基礎，也就是經驗的累積逐漸形成觀點，觀點的結合逐漸統整成整體的心理圖像。在數學知識的觀點上，從邏輯實證論的觀點來看，數學是絕對正確、不可以挑戰且獨立於心智的知識體系。而邏輯實證論的觀點，是將數學知識視為是早就存在且靜態的知識體系。從建構論的觀點出發，數學知識的形成是一社會建構的歷程，是透過臆測、駁斥與邏輯發現的歷程，不斷發展而成的知識體系（Sfard, 1998）。建構論把數學視為是動態成長的知識體系，是在歷史與社會發展的脈絡中，逐漸演化與發展而成的（Steinbring, 1998）。兩種知識論對數學知識的觀點完全不同，因此，本研究認為在數學知識的觀點上，可以分為靜態固定和動態發展兩個極端。

在數學學習的觀點上，若從行為論的主張來看，學習可以透過「傳遞—接收」的歷程來進行，因此盛行講述法，教學的焦點著重在計算技巧與例行性問題的練習；若從建構論的觀點來看，則強調個人主動建構知識的歷程，注重

基本技巧熟練以外的能力，包括思考和解決問題的能力，同時訴求以理解為目的的數學教學（Anderson, 2003; Rodriguez, 2005）。行為論和建構論對教與學不同的主張，使本研究認為可以從被動吸收和主動建構兩個極端，來瞭解教師對於數學學習的觀點。不過，教師對於數學的觀點或是對於數學學習的觀點，通常只是程度上的差別，並非是全有或全無的狀態。因此，本研究嘗試以一條連續的直線來說明教師可能具備的數學教學意象，而且若從這兩個面向觀點整合而成的整體圖像來看，教師可能會發展成數種不同的數學教學意象，例如：直線的一端可命名為「被動吸收靜態規則的意象」，由靜態固定的知識觀、被動吸收的學習觀所組成；直線的另一端則命名為「主動理解概念發展的意象」，由動態發展的知識觀、主動建構的學習觀所組成。教師可能發展數學的教學意象如圖1所示。

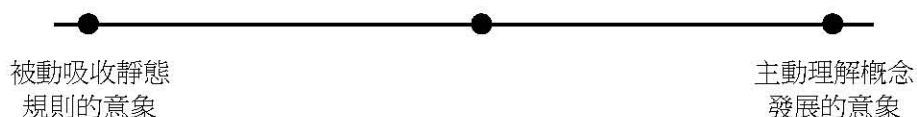


圖 1 教師可能發展的數學教學意象圖

再從教學意象相關的研究發現，教學意象是影響教師教學表現的關鍵（Clandinin, 1986; Elbaz, 1983; Johnston, 1990），而且個人的生活和學校經驗，以及教學專業的訓練是主要的影響因素（Clandinin, 1986; Lin, 1994）。其中，前者的影響遠比後者來得大（陳國泰，2000；Calderhead & Robson, 1991），而且如果過去的學習經驗是痛苦的，便容易發展成負面的教學意象；但如果過去的學習經驗是愉快的，則會發展成正面的教學意象（Calderhead & Robson, 1991）。雖然過去的研究並未指出何種經驗會產生何種教學意象，但都指出經

驗是意象發展與形成的關鍵，而且教學意象是一個過去與未來經驗不斷修正與動態發展的結果。從教學意象相關的研究結果可以瞭解，儘管師資培育課程對教師教學意象所形成的影響有限，但卻扮演著關鍵的角色，因為過去的學校和生活經驗無法重來，唯一可以改變的部分，便是專業的經驗層面。而教學專業經驗包括現場實際教學的經驗，以及師資培育課程的影響。影響現場教學經驗的因素多且複雜，是過去教學意象研究的焦點，而師資培育課程的影響，卻較少被詳細地檢視。師資培育課程有兩個層面，一是鉅觀整體的課程規劃，二是微觀個別課程的實施，本研究即針對微觀的層面，選擇普通數學課程來瞭解對教師數學教學意象發展的影響，一方面擴充教學意象研究的面向，另一方面則瞭解師資培育課程在教師教學意象發展過程中可能扮演的角色和影響。

參、研究方法

一、研究對象和方法

參與研究的教師有45位，大多是外文、商業與教育等非數學相關的背景，只有一位是統計系畢業。除了一位教學年資超過11年的資深教師外（T₄₅），其餘教學年資都是在5年以下的初任教師（24位，T₁~T₂₄），以及6~10年的經驗教師（20位，T₂₅~T₄₄）。他們目前大多為特教班的教師，且為獲得一般教師資格而回到師資培育機構進修。

從文獻中瞭解到個人的學習經驗是教學意象發展的基礎，以及教學意象是影響教師教學表現的關鍵。過去的研究大多探討教師進入教學現場後，教學意象的發展、轉變及其影響因素，較少檢視師資培育課程對教師教學意象的影響。但從教學意象形成的影響因素來看，師資培育課程扮演著關鍵的角色。因此，本研究以師資培育的數學課程為焦點，採用個案研究的方法，透過參與觀

察普通數學課程的實施，來瞭解微觀的師資培育課程對教師數學教學意象的影響。本研究之所以採用個案研究為方法，是因為個案研究關注個案的獨特性與複雜性，強調研究的過程與重視情境脈絡的瞭解（林佩璇，2000），同時運用觀察、訪談和文件分析，對特定的個人和事件進行深入和全盤的詮釋與分析（陳李綢，2005）。這和教學意象的發展具有個別性、脈絡性，以及複雜性等特質相符合，同時也適用於初步探索的議題。本研究將透過問卷、參與觀察和深度訪談，以及相關文件蒐集，來探討個案教師修習普通數學課程的學習經驗，以及該學習經驗對教師數學知識和數學學習觀點的轉變，進一步瞭解普通數學課程對個案教師整體數學教學心理圖像可能產生的影響。整個研究在2005年暑假期間進行，歷經一個兩學分完整的普通數學課程的學習。上課期間，研究者在教室後方進行錄影和現場記錄，但不參與現場師生的互動與討論，以忠實地呈現整個普通數學課程實施的歷程為原則。

二、教學實施方式和課程內容

（一）教學實施方式

普通數學課程授課教師為張教授。張教授擁有應用數學的博士學位，在師資培育大學服務期間，普通數學一直是主要授課的課程之一。張教授的教學理念強調應用和歷史兩個層面：從生活的應用中，來讓學生瞭解數學知識的實用性；從歷史的脈絡中，讓學生瞭解數學知識的發展，而不是將數學當作是一堆無趣的公式與定理的組合。張教授認為，數學學習最重要的是概念的理解，而非傳統教學所強調的解題技巧或知識的傳授，而且要檢驗學生是否真的理解，就是要求學生以自己的言語將數學概念解釋清楚，並且能讓他人瞭解。因此，強調小組討論、思考、對話來釐清數學概念，是張教授普通數學課程實施的特色。而在本研究中，張教授仍以小組合作學習的方式來進行，將普通數學

的課程內容分成若干相關的子題，以各子題中的重要基本概念為主，進行小組的討論和解題。在小組討論期間，張教授將在各小組間巡迴參與小組討論，提供適當的協助和提示，以促進各組解題的思考和討論，最後再進行各組發表和澄清。整個數學教學的過程，提供包含具有挑戰性的問題、探究的機會、生生與師生之間充分的互動，以及教學者講解的機會。這樣的教學，是以概念理解與探究為主的教學取向，而非傳統上以傳遞和講述為主的教學方式。

（二）課程內容

張教授認為，課程的規劃應建立在學習者的能力基礎之上，提供具有挑戰的內容，引發學習者對數學概念產生探索和思考的需求，同時增加學習成功的成就感。因此，張教授決定課程主題包括邏輯概論、自然數與整數、基底變換、有理數系與實數系，以及集合論。其中，有些主題是探討教師所熟悉之數學概念背後的知識結構（如自然數與整數），有些主題則是高中課程延伸的概念（如集合論），這樣的課程難度應該可以符合教師的能力基礎。而課程內容的介紹則從情境或基本概念來引入，引發教師思考解題的興趣，進而透過討論來釐清概念。例如：在邏輯概論主題中，會要求教師先思考什麼是邏輯？在日常生活中，有哪些不合邏輯的話？在體會邏輯和日常生活的關係後，再引入介紹邏輯學上的基本定義，例如：敘述、否定敘述、複合敘述、蘊涵等，再請教師舉出日常生活中符合定義的例子來討論；在自然數與整數主題中，從原始人的生活情境中去討論如何建立數字及計數，進而發展出全數及整數？以及從情境和定義中去釐清基本的數學概念，例如：為什麼 $-(-1)=1$ 等；在基底變換單元中，討論十進位系統下的1、2、3、4等符號所代表的意義，以及用其他符號及進位系統來顯示1、2、3、4所代表的數量，並進行運算；在集合論單元中，利用希伯特旅館的故事來思考無窮的概念，讓教師在有趣的問題中來合作討論，並釐清無窮抽象的概念。在課程實施前，研究者透過訪談瞭解張教授教學實施

和課程規劃的取向和目的，張教授也分享過去學生修習此課程的反應等，但研究者並未參與課程內容與教學實施的規劃。

三、資料蒐集的工具與方法

(一) 教學意象的開放性問卷

爲了瞭解教師在修習課程前後所具備的數學教學意象，本研究設計教學意象的開放性問卷，於課程實施前進行前測、課程結束後進行後測。根據過去教學意象相關研究的主張，本研究將教學意象定義爲教師結合個人數學知識和數學學習的觀點，對數學教學所形成的整體圖像，而且個人的數學學習經驗是形成與發展這個心理圖像的基礎。因此，問卷內容包含了教師對數學知識的觀點、對數學學習的觀點，以及過去數學學習的經驗三個部分。在數學知識的觀點上，主要是瞭解教師將數學定位成靜態固定或是動態發展的知識體系；在數學學習的觀點上，主要是研究教師對於數學教學時師生應扮演的角色、教學和學習的焦點，以瞭解教師的觀點是偏向被動吸收或建構理解；在數學學習的經驗上，主要是瞭解教師過去數學學習的經驗是偏向正向愉悅或是負向恐懼。每個面向設計二至四個開放性問題，在後測的問卷中，問題會加入「上完普通數學的課程後……」的字句，以瞭解教師經歷普通數學課程的學習後，其教學意象改變的情形。本問卷內容所涵蓋的三個面向，是根據過去教學意象相關研究的定義與發現而形成之本研究對於教學意象的定義，再從定義出發形成問卷的面向與內容。因此，本問卷具有理論的依據與效度。而爲了要確認教師填答內容的一致性，本問卷也在每個面向設計二至四個問題，從不同的問題來確認其對數學知識或數學學習的觀點，以及減少教師答非所問的結果對後續分析的影響。

（二）教學錄影與觀察紀錄

爲了要完整地記錄普通數學課程實施的歷程與師生的互動，所以，本研究採用錄影與觀察記錄的方式來蒐集資料。錄影的焦點在於記錄課程實施的歷程、互動的方式和對話的內容，同時輔以現場教學整體的觀察紀錄，以彌補攝影機之不足。整個研究共進行了28節課的教學錄影和觀察記錄。

（三）個別訪談和團體座談

訪談的目的是要瞭解普通數學課程的實施方式、和參與教師過去數學學習經驗的異同，以及對其原有數學知識觀點和數學學習觀點的影響，進而探討普通數學課程的學習經驗對其整體數學教學意象可能產生的影響。因此，在個別訪談方面，採用半結構式的訪談，以數學教學意象的兩個向度和學習經驗三部分做爲訪談大綱。例如：「你是第一次以小組討論的方式來上數學嗎？這種學習方式和以往所上的數學課有何不同？」、「你以往數學學習經驗對哪一個階段的學習印象最深刻？當時對數學的看法如何？上了普通數學之後，對於數學知識的看法是否有所不同？」訪談在期中考後實施，隨機抽取10位參與教師進行個別訪談，每位訪談約30分鐘；而團體座談採取主題式的座談，由參與教師自願發表在普通數學課程的學習經驗和感受，以及對於數學學習的收穫。團體座談於期末舉行，時間約1個半小時。個別訪談和團體座談均以錄音來蒐集資料。

四、資料的分析與編碼

本研究所蒐集的資料包含開放性問卷、教學錄影和觀察紀錄、個別訪談以及團體座談等類別。每種類別的資料在轉錄成文字後，便進行編碼的工作，編碼採日期（月日）-對象（研究者：R、參與教師：T_n、小組：G_n）-事件（觀察：Ob、訪談：In、座談：GT、問卷：Qu）的格式。本研究的資料由於

屬於質性的文字資料，所以，採類屬分析的方法來分析，而非以量化計分的方式進行，並希望從各類別的資料編碼、歸類和濃縮的過程中，發現一些共同的現象，以及可以解釋這些現象的概念（陳向明，2004）。例如：從開放式問卷中分析教師修習普通數學課程前後對數學知識的觀點、對數學學習的觀點及其過去數學學習的經驗，以對教師的數學教學意象進行歸類，以達成研究目的的一和三。從教室觀察資料的歸類和濃縮，來瞭解教師在普通數學課程中的學習表現，再從後測問卷、個別訪談和團體座談的資料中，透過不同資料比對和校正的程序，來探討普通數學課程學習經驗對其教師數學教學意象可能產生的影響，以達成研究目的二。此外，所有資料由兩位分析者共同進行分析與歸類，歸類過程中，會針對不一致的部分進行討論與確認。最後，形成共識後的歸類結果將做為資料呈現的依據，同時提升分析結果的可信度。

肆、研究結果

一、過去負面的學習經驗和「引導發現理性邏輯」的數學教學意象

從前測問卷上的回答來看，參與教師在修課前對於數學知識的觀點可以分成三類：一是將數學知識視為是強調邏輯推理、客觀理性的知識體系（14位）；二是將數學視為是艱澀困難、抽象與生活無關的知識（17位）；三是指出數學知識的應用、價值、範圍或學習方法等（14位）。其中，前兩類再歸類為偏向靜態固定的數學知識觀（31/45），包括強調邏輯推理和客觀理性的數學知識：「數學是由最初的實用性為基礎，逐漸發展為抽象邏輯推理」、「數學是一個充滿邏輯概念的學科，它非常的講究科學根據、非常的理性」、「數學知識是理性的，有一定的定理，可以推演出其結果」、「科學的，講求邏輯與推理」、「數學知識是絕對的，不會受人、時、地、物的影響」、「數學乃科學之母，注

重理性邏輯，講究百分之百的精確」(0708T₈T₄₄T₂₁T₅T₃₃T₄₀Qu)；或是強調數學知識的抽象與艱澀困難：「數學只是一群跳動的符號」、「數學是較嚴肅、枯燥、深奧、不具實用性」、「數學知識高深難解，多數不會實際出現在生活運用上」(0708T₉T₁₃T₂₉Qu)。

對於數學學習的觀點，大多數教師偏向學生主動參與、思考探索的學習觀(42/45)，因此，認為教學時學生是主角，教師應扮演引導和協助學生學習的角色，讓學生在主動思考、探索和解題中來進行數學的學習：「老師應扮演引導者角色，……學生應該要主動發現問題，願意和老師互動」、「老師是引導者的角色，而非絕對提供解答的權威者。學生應該與老師、同儕互動交流……」、「老師扮演引導和協助的角色，學生扮演實際操作的角色」、「老師應扮演鷹架之角色，讓學生能盡情發揮與探究」、「老師不要一味地當解答者，應把問題拋出，請孩子們用自己的方法解決」、「老師：布題，疑惑時的解答者；學生：發現概念，統合新舊觀念」(0708T₃T₁₂T₁₈T₃₀T₃₅T₄₂Qu)。

在過去數學學習的經驗上，大多數教師均有負面不愉快的數學學習經驗(33/45，其餘是中性或愉快的學習經驗)，包括恐懼、無趣、厭惡、缺乏信心等感受，甚至很早就決定放棄數學：「照本宣科，用許多公式來解題。對數學毫無興趣，甚至害怕」、「老師講解速度很快、內容很多……派很多數學習題當回家作業，我常不會寫或沒寫完而被處罰，那是一段慘痛的學習經驗」、「教學以解題技巧為主，不在乎你是不是真的理解，到小六……數學成績就很差，開始討厭、害怕數學，後來乾脆放棄了」、「照本宣科教，背公式、解題、考試、打人、當掉，國中後便放棄數學，從此看見數學就逃避」、「著重於計算與演練，而課程重點多強調考試命題的題型，常因為數學成績不理想，對此科目產生畏懼與沒有信心」、「上課通常很填鴨而無趣，所以讓我對數學有恐懼及厭惡感」(0708T₂T₅T₇T₁₄T₂₈T₄₄Qu)。

個案教師雖然擁有負面填鴨的學習經驗，但卻認為，教學時應扮演引導和協助者的角色，讓學生在互動和操作過程中來學習數學的知識；個案教師雖然認為數學是偏向靜態、理性邏輯的知識體系，但卻強調透過引導來協助學生主動發現數學知識的歷程。這樣的結果似乎有些矛盾，但仔細檢視教師的填答後發現，31位偏向靜態固定數學知識觀的教師，有26位表示對數學知識的觀點是來自於過去的學習經驗，而在42位偏向主動參與思考學習觀點的教師中，有40位是來自於理想或是理論的觀點，而且有23位認為要在現實環境中實施會有所困難。這樣的結果呼應了教學意象的複雜性和連續性，同時也給予將教師修課前的教學意象命名為「引導發現理性邏輯」的數學教學意象充分的理由，因為這個意象是由偏向靜態固定的知識觀與互動理解的學習觀所組成的，若從圖1的教學意象圖來看，研究前參與教師的數學教學意象，可能位於直線上中間的位置。若以任教年資來看，發現偏向靜態固定知識觀的初任教師有17位（17/24, 71%），經驗教師（含資深教師）有14位（14/21, 67%）；偏向互動理解學習觀的初任教師有23位（23/24, 96%），經驗教師有19位（19/21, 90%）；具有負面不愉快數學學習經驗的初任教師有18位（18/24, 75%）、經驗教師有15位（15/21, 71%）。由此看來，不同任教年資的教師，在參與研究前具有類似的數學教學意象。

二、在普通數學課程中經歷不同的學習經驗和體會

（一）經歷以思考與理解為主的數學學習經驗

1. 經歷主動思考與討論的學習歷程

張教授以邏輯概論做為第一個學習主題，是希望讓教師在有點熟悉又有點挑戰的內容下，從生活中常見的敘述來切入邏輯概念的學習。所以，課程一開始並未進行邏輯定義的介紹和說明，而是請各組提出生活中不合邏輯的用

語，並進一步討論「何謂邏輯」？「何謂敘述」？再於討論中宣告邏輯中敘述的定義，再以敘述的定義去檢視各組所舉的例子。整個學習歷程便在介紹意義、各組舉例、討論與釐清的過程中，完成邏輯單元的學習。最後，以黑帽、白帽的推理問題來引發教師的思考與討論（0715ROb）：

從前有一戶人家有三兄弟，他們是全國最聰明的人。國王把他們找來對他們說：「我來考驗你們看看誰最聰明，我就請他當宰相。現在我有3頂白帽子和2頂黑帽子，把你們關到一間很黑的房子裡，蒙上眼睛，然後每個人戴一頂帽子後，再把你們帶出來，把布打開，你們可以看到其他兩個人所戴帽子的顏色，但是看不到自己所戴的帽子顏色。」帶出來打開蒙布後，國王問三兄弟：「你們知道自己戴著什麼顏色的帽子嗎？」，三兄弟都說不知道。國王再一個一個問：「老大，你知不知道你自己帽子的顏色？」老大說不知道；國王問：「老二，你知不知道你自己帽子的顏色？」老二也說不知道；國王最後問：「老三，你知不知道你自己帽子的顏色？」老三回答說：「我知道。」請問老大、老二、老三戴的是什麼顏色的帽子？

爲了要協助教師思考，張教授提示三點：一是三兄弟是全國最聰明的人，二是一開始，3個人都說不知道，三是要注意故事中的順序。各組討論得非常熱烈，但提出的答案都有漏洞。最後各組一致同意第二組的解法：「情況有3種，第一種黑黑白不可能，因爲馬上會有人知道自己帽子的顏色；第二種黑白白也不可能，因爲當一起問而且都說不知道時，就知道不是兩黑的情況，如果看到一頂黑色，就知道自己的帽子是白色，所以一定是白白白的情況」（0715ATOb）。最後，有同學欲罷不能，也上臺提出一個推理的問題，請同學思考：「I'm looking at a picture. Brothers and sisters I have none. This man's father is my father's son. 請問：圖中的人是誰」（0715T32Ob）。

2. 經歷對運算結構理解的學習歷程

張教授表示，即使是單純的計算或算則，都蘊含著進位系統和運算結構在內，但是，這個部分是教師過去數學學習經驗中所缺乏的。因此，在基底變換的單元，希望透過不同進位系統的轉換，讓教師瞭解運算所蘊含的進位系統的結構。首先，先透過教師熟悉的乘法運算，讓教師比較直式算則和所謂「建構式紀錄」的差異，瞭解到二者所經歷的運算歷程和次數都相同，但記錄的方式卻不同，同時也瞭解到十進位系統的運算結構(0722ATOb)。之後，再透過虛擬故事來引發不同進位系統的發展，以及不同進位系統間轉換的需求。這個虛擬的故事如下(0729ROb)：

公元5000年，發現宇宙中有其他的高等生物。大家要到 α 星球當大使， α 星球人的手指頭是連在一起的，他們發展出只有0和1二進位的計數系統。 α 星球的人想要多瞭解地球人，他們說，我們一個月的收入是101101101元/月，這個收入在地球上是多少錢？

二進位系統是逢二進位，所以 $101101101_{(2)} = 1 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + \dots = 365$ 元/月。那如果 α 星球的人問說：「地球上一個月的薪水是多少？」以1,863元/月為例，如何把1863的數字轉成 α 星球人看得懂的數字？有些組以科學記號的方法來完成($1863 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^2 + 2^1 + 1$, $11101000111_{(2)}$)，有些組以下面的長除法來完成(0729ATOb)：

G_2 ：可以看十進位時的作法： $1863 \div 10 = 186 \dots 3$, $186 \div 10 = 18 \dots 6$,
 $18 \div 10 = 1 \dots 8$ ，所以除以2時，所得到的第一個餘數是右邊第一位，接下來的餘數是右邊第二位、第三位……

除數	被除數(商)	餘數	所以答案是： 11101000111 ₍₂₎
2	1863	1	
2	931	1	
2	465	1	
2	232	0	
2	116	0	
2	58	0	
2	29	1	
2	14	0	
2	7	1	
2	3	1	
2	1	1	

在三進位β星球大使的故事中，教師大多能順利地完成十進位與三進位系統的轉換，不過，反應三進位的除法很難(0729ATOb)。所以，當進入到七進位系統時，張教授直接就進入乘除運算的計算，並提示：在解決十進位除法問題時，要先學九九乘法表，所以在解決七進位除法問題時，也必須先做出六六乘法表，才能夠解決問題。教師做出六六乘法表後，都可以解決七進位的除法。最後，進行三進位與七進位系統的換算，大多數教師都能以長除法來完成轉換(0805ATOb)。

3. 經歷以概念理解為主的學習歷程

在教學實施的過程中，張教授除了提供提示來促進各組思考之外，也在巡視時，透過對話的方式來引導並協助各組解題和理解。例如：「十進位轉成三進位OK嗎？把十進位轉成三進位的方法用來把七進位轉成三進位」(0805ATOb)。甚至有教師在理解並成功地將七進位轉成三進位後，興奮地大喊「耶！耶！耶！」(0805G₆Ob)。

集合論的單元課程，最主要的目的是讓教師去思考與討論關於無窮的概念，並從討論中獲得理解。不過，無窮的概念比較抽象，所以教學時，先藉由

小數基本概念、有限和無限小數的定義討論，以及「 $0.\bar{9}$ 和1誰大」的問題做為暖身(0812ATOb)。引發對無窮概念的思考與討論後，便以星際旅館的問題，請教師比較自然數與全數兩個集合中元素的個數誰比較多？有人說「一樣多，因為只差一個0，是微乎其微，可以省略掉」(0816T₄Ob)；也有人說「把0獨立出來，1個數字1個數字對應，然後得出W比較多」(0816T₄₀Ob)。張教授提醒數學上的定義是：只要能找到一對一的對應關係，就是相等，但是，要思考如何對應。星際旅館的問題與當時各組的對話如下(0816ROb)：

有一位captain在退休之後，建了一間旅館，他號稱這個旅館有無窮多個房間。旅館蓋好之後，他請你來管理，但是有幾個要求：1.每個房間只能住一個旅客。2.我交給你的時候，每個房間都住了一個旅客。3.有旅客來的時候，你不能拒絕他說房間已經滿了。4.希望每一天，每個房間都保持一個旅客在住。今天我來了，你要安排一個房間給我，那要怎麼安排一個房間給我？

G5：我們假設有n房間， $a_1 \dots a_n$ ，n是無窮大，要再多一個房間，變成 $\infty + 1$ ， $\infty + 1$ 還是無窮大。

張：為什麼 $\infty + 1$ 是無窮大？(該組回答不出來)

G1：我用哲學的觀點來解釋，因為1已經內聚在無窮大之中，所以無法把1切割出來……(全班大笑，尤其當張教授說「我聽不懂」時，全班笑得更大聲)

G7：大家拿著行李往後移一間，那第一間就可以給新來的人住，因為往後移一號，一定有房間可以住。(畫圖輔助說明)

G1：剛剛老師說：旅館已經住滿了，住滿了怎麼再去移動？

張：故事中並沒有說房間已經住滿了，只說每個房間都有一個旅客居住。從這個角度來看，自然數和全數哪一個多？……透過這

個討論，讓大家體會無限的概念，一個號碼之後，一定還有一個號碼，無窮無盡。(940816ATOb)

如果來的旅客人數如， $Z = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ，如何安排到擁有 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ 的房間中？各組雖有提出解答，但都含糊不清。最後，有人提出以下的對應關係，才獲得大家的認同(0816ATOb)：

$$T_{34} : N = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$$

$2n+1$ $2n$ 正數對應到 $2n+1$ ，負數對應到 $2n$

$$Z = \{0, 1, 2, \dots, -1, -2, -3, \dots\}$$

此外，在自然數與整數單元中，也從大家認為理所當然的事實中來進行概念的釐清：為什麼 $-(-1)=1$ ？有的人說「是相反的相反」；有的人從方向或數線的角度來說明；有的人則透過之前所討論的「 $-1+1=0$ 」的負數定義來回答：「 $-(-1)+(-1)=0$ ， $-(-1)+(-1)+1=1$ ，因為 $(-1)+1=0$ ，所以 $-(-1)=1$ 」。負數定義的回答獲得大家的認同(0722ATOb)。

(二) 不同數學學習經驗引發內在觀點的改變

不斷地要求思考、討論與概念釐清的教學要求，讓大多數教師感受到學習的壓力。例如：「……是我一生中印象非常深刻的課，因為老師的教學非常嚴謹，一點商量都不行。我昨晚兩點鐘醒來到現在，可以用兩個字來形容，就是焦慮（全班大笑）……」(0819T₆GT)。因為要克服壓力，所以採用互助合作的方式來進行數學學習。例如：「……只要有人不懂，對方都會不厭其煩地指導」、「同學……彼此互相交流，……常常利用下課的時間還在討論」(0819T₁₇T₄₄GT)。而且在互助的過程中，發展出革命情感並更投入數學學習。例如：「普通數學將成為大家共同的回憶，一段有血有淚，共同奮鬥的血汗史」、「同學的書包裡總少不了數學筆記和相關資料，炎炎夏日揮汗念數學，別有一番滋味在心頭」、「第一次感受到這個革命情感，……真的感受到大家很

認真的學習」(0819T₇T₄₄T₃₀Qu)。以下呈現教師因為學習經驗改變，所引發內在觀點的改變。

1. 可以勇敢地面對數學學習的恐懼

有些教師爲了不想再接觸數學，去念專科或選擇與數學無關的科系；有些教師在修課的過程中，什麼課都修，就是不修普通數學；也有人到現場任教後，與同事換課，目的就是不要碰數學(0819ATGT)。過去不愉快的學習經驗，使他們不願意再去接觸數學。然而，在修習普通數學後，許多教師表示，儘管過程中有很大的壓力與焦慮，自己的頭腦在解數學時依然不靈光，但是透過這次的學習經驗，使他願意提起勇氣來面對自己的弱點和對數學學習的恐懼。例如：「我會保持算數學的習慣，我想一學期不行，N年總行吧！不能填滿失落荒廢的那一角，最起碼不要再讓它變成『棄地』。謝謝老師，讓我有勇氣去面對這數十年的缺憾」、「我不害怕數學了！即使我真的不會，我也不會逃避，會去找真正的原因」(0819T₄₅T₁₇Qu)；「……我從以前就不敢上臺，只要上臺我就會想下去，……今年……我都很認真上，而且我不知道的，我都問同學，……我覺得我做到了，我敢面對……」、「其實我是很焦慮，可是我一直告訴自己，我要勇敢地面對它。而且焦慮一定是有原因，所以我要克服我的焦慮原因，是因為我不懂，所以我就要努力去問同學」(0819T₁₉T₆GT)。

2. 反省數學教學的方式

以合作學習、討論、發表和澄清的方式來學數學，對參與教師而言，是一個全新的學習經驗。這樣的經驗，引發了他們對於自己原有教學方法的反省。有的教師反思如何讓學生在概念理解或情意上有所收穫：「……有反省檢視自己的機會，……臺上的自己要去如何去引導臺下的學生，讓他們喜歡數學」、「讓我深深體驗到經由討論的過程，不但可以建構一些比較紮實的概念，還可以透過合作學習補足自己較缺乏的部分」、「給我對數學知識、教學方法新

的概念，也可以省思以往自己的教學方式，是不是學生所要的，或是所能接受的」(0819T₂₅T₃₉T₃Qu)；有的教師則瞭解到學生學習的困難與未來教學的方向：「老師的教學方法給我有很大的省思空間，……這樣的學習歷程，讓我更瞭解孩子學習的辛苦」、「往後在數學教學上，我也會把教授帶給我們的求學問的精神運用在課堂上，相信學生會獲得不一樣的啟發……」(0819T₈T₃₁GT)。

3. 體會合作學習的優點

撇開學習的壓力不談，許多教師都表示喜歡這樣的學習方式，這一方面是因為在上課過程中提供了許多思考的機會，讓他們「生鏽多年的腦袋轉一轉，看看腦袋能否變得比較靈活」(0819T₁₃Qu)；另一方面，則是因為可以在過程中，瞭解其他人的想法，並找出解決問題的方法。親身的經歷讓他們體會到合作學習的優點：「……小組的方式真的是可以討論到東西……我覺得每一個人的想法都不一樣，除了我的想法之外，我可以聽到別人的看法」(0808T₃₄In)；「……同組的同學可以互動，你也可以藉著互動的過程中瞭解同學的想法」(0810T₄In)；「至少有一段時間讓我去思考，……在討論當中，慢慢地好像就會有一些答案」(0811T₁In)；「合作學習的方式讓我覺得可以去多聽別人的看法」、「……同組成員中的同學會點醒我，讓我能進入問題的核心，而且在課堂上可以分享到不同人的思考模式」(0819T₃₅T₅GT)。

三、緊張刺激的學習經驗和「探究思考走出迷宮」的數學教學意象

數學知識的抽象與艱澀，使得修課前有教師表示，需要有一顆「愛因斯坦的腦袋」才能學好數學(0819T₂Qu)；過去不愉快的學習經驗，也使大多數教師認為，數學是由一堆沒有意義的規則和公式所組成。可是，在課程結束後，大多數教師在問卷中均表示，真正體會到數學中的概念理解、思考和邏輯推理的部分。而且透過討論、思考與釐清，可以使過去覺得枯燥無味的數學，

轉變成有趣的學習科目，同時釐清過去模糊或基本的概念。也就是說，修習普通數學課程後，教師瞭解到數學抽象符號規則背後的意義：「數學不再只是應付聯考而學的一些公式，數學知識是經由一連串邏輯、思考、驗證而得的」、「以往學習數學是用背的，但上了普通數學課程，會用理解的方式思考問題」(0819T₃T₉Qu)；或改變他們先前對於數學知識的觀點：「數學不只是計算，重點是概念的釐清與邏輯能力的培養」、「上完普數之後，才發現原來數學可以很有趣，不是很無聊的東西」(0819T₂₄T₃₇Qu)。整體來看，改變最多的是認為數學不再那麼抽象難懂，是可以理解其背後的原理與意義；數學不再是那麼枯燥乏味，可以是有趣的，並可以釐清過去的疑惑。但仍有6位教師對數學知識的觀點沒有改變，其中3位認為數學對他們而言依然高深且艱澀難懂(T₁₄T₁₉T₃₃)，非他們能力所能理解；T₁₁認為數學知識還是強調邏輯與推理，不過，對邏輯部分有更清楚的概念；T₂₅、T₃₆則是過去對數學學習有興趣，認為數學知識是透過推理、驗證而得，具有挑戰性與可理解性，在上完課程之後，更確認自己原有的觀點是正確的。

在數學學習的觀點上，大多數教師在研究前從理論的觀點來看數學的學習與教學，強調學生學習過程中的主動參與和探索，教師再從旁引導與協助，來解題與應用。在經歷普通數學的學習後，教師不但更確定自己過去的觀點是正確的，同時也表示對於互動引導和概念理解的教學實施和學習體驗，有更深的體會與反省：「老師應扮演引導者的角色，學生要主動思考，之前就有這種想法，上完普數後，這種想法更強」、「……由學生充當老師講解，老師充當學生適時提問題，如此，兩方皆能有所收穫。以前也覺得應該如此，卻不知如何著手，現在老師的上課模式提供了我一個很好的sample」、「我一直認為上數學課就要用這種方式，快樂又有趣，可以深入問題的核心」(0819T₈T₂₄T₄₀Qu)；或是體會到數學學習的焦點應在於理解：「瞭解學生運算過程的『思考歷程』，

才能協助有數學困難的同學解決難題，……不再只注重『答案』對與否，應注意學生是否『真的懂』，「把焦點擺在基本概念的釐清，而非只是單純的解題與計算而已」(0819T₂₄T₂₇Qu)；也瞭解分組合作學習的優點：「學會自己能清楚地告訴自己和別人，……為什麼要用這樣的方法解答，在別人能夠聽清楚之下，表示自己也真的瞭解」、「可以讓學生在想法的交流中成長，驗證自己的想法，也吸收別人的長處，學生學到的是一種思考，還有表達的能力」(0819T₃T₄₁Qu)。整體來看，有28位教師對於數學學習的觀點沒有改變，但是表示對互動理解的學習有更具體、深入的瞭解；17位教師略有改變，包括更強調學生發表的重要(如T₁₆)、更強調教師要懂得如何拋問題(如T₁₅)，以及基本概念釐清的重要(如T₄₄)等。而原來偏向傳統學習吸收觀點的3位教師，也都調整成強調學生要主動參與思考與探究的學習觀。

而在數學學習的經驗上，過去不愉快的經驗使許多教師很早就放棄數學的學習。有教師表示：「藉由不斷大小考的過程，讓學生及自己知道自己得幾分，達不到老師的標準就被打，那一種恐怖的經驗，好像自己是數學白痴一般」(0819T₁₉Qu)。不過，在上完普通數學後，許多教師表示，雖然還是會緊張與焦慮，但是和過去學習數學最大的不同是，不再認為自己很笨，會在學習過程中感受愉快與刺激，有充分表達自己想法的機會，有受到重視的感覺。更重要的是，體會到「真正理解數學的樂趣」。例如：「過去看見老師進教室就開始緊張、擔心，不曉得要被揍幾下。上課『兩眼無助+茫然看著口沫橫飛的老師在臺上解題』，聽見鐘聲就在心裡喊萬歲；現在看見老師還是會很緊張，但上課過程很『愉快+刺激』，覺得自己在討論過程中有被『重視』的感覺，……好像自己不是那麼笨，是可以學數學的」、「其實『終於瞭解』的感覺真是很好，像走出迷宮，豁然開朗」、「唉！數學真是一個nightmare，……不過我相信我這次的學習是比較快樂的，……能夠搞懂數學某部分的真理，亦是

人生一大樂事」、「以前背了很多公式，但不太清楚公式如何來的……。上完普數後，對基本的概念有所探究，瞭解以前模糊的部分是件快樂的事情」(0819T₂T₁₃T₂₉T₃₇Qu)。整體來看，41位教師表示歷經了完全不同的數學學習經驗，4位認為改變較少的教師，其中有2位表示雖然上課方式不同，但自己的理解依然有限，感嘆自己和數學是兩條平行線(T₁₉、T₃₃)；另2位教師則是有過愉快的數學學習經驗，但對於如何確認學生概念的理解，有更深入的體會(T₁₂、T₂₅)。

總結以上，在普通數學課程中，大多數教師均表示經歷了和過去完全不同的數學學習經驗和感受，可以從正面和肯定的方式來面對自己過去所恐懼的數學學習；大多數教師改變了原有對於數學知識的觀點，不再將數學知識視為是一堆無意義的規則或公式，而是可以理解的；所有教師均認為，數學學習時，學生應主動思考與探索，教師應提供適當的協助與提問來促進對概念的理解，同時對互動理解的數學教學實施更具體的瞭解。亦即，在經歷普通數學「緊張刺激」的學習經驗後，參與教師從原先居中的「引導發現理性邏輯」的教學意象，往右端移動，將原有的教學意象修改為「探究思考走出迷宮」。研究前後教師數學教學意象移動的情形如圖2所示。若再看不同年資之教師在數學知識觀和數學學習經驗改變的情形(數學學習觀變動不大)，則發現初任教師知識觀改變的有13位(比例13/16, 81%)，經驗教師改變的有12位(比例12/15, 80%)；在負面不愉快學習經驗上，初任教師改變的有17位(17/18, 94%)，有經驗教師改變的有14位(14/15, 93%)。由此看來，不同任教年資的教師在參與研究後，數學教學意象改變的情況很類似。

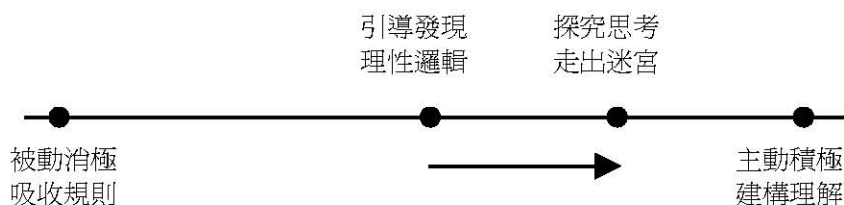


圖 2 研究前後教師的數學教學意象移動圖

伍、結論與討論

教學意象是一個不斷變動與成長的有機體 (Clandinin, 1986; Johnston, 1990)，而且形成的主要因素有二：一是個人的學習經驗，二是專業經驗的影響 (陳國泰，2000；Lin, 1994)。雖然過去的學習經驗對個人教學意象形成的影響很大 (Calderhead & Robson, 1991)，但師資培育課程提供的專業經驗卻是師資培育工作者唯一能著力的地方。過去相關研究得出類似的建議，但卻缺乏進一步檢視師資培育課程對教學意象的影響，因此，本研究便在這樣的思考下進行。從觀察、訪談和文件分析的結果發現，普通數學課程的教學，提供教師非常不同的數學學習經驗，讓參與教師在充滿思考和互動討論的環境下進行學習。過程中，雖然充滿了緊張和壓力，但卻經歷了正面和愉快的學習經驗，引發教師內在對於數學教學和學習觀點的改變。從問卷前後測的分析結果來看，教師的教學意象在普通數學課程學習後，其數學教學意象會往「主動積極建構理解」的一端移動。而這樣的結果，除了呼應學者所強調「個人學習經驗是教學意象發展基礎」的主張外，似乎也「看到」師資培育課程對於教師教學意象發展可能的影響。雖然這樣的關係因個案研究的緣故，需要進一步的檢視和確認，在推論時也應有所保留和謹慎，但也讓我們瞭解到師資培育課程可以扮演的功能與影響。或許未來在師資培育或教師在職進修課程中，除了將目前數學

教學或學習的理念融入課程設計外，還可以提供職前或在職教師「動手做數學」的經驗，讓教師親自經歷解題、思考、討論和推理的數學學習歷程，不僅得以釐清數學的基本概念，也可體驗數學知識的本質與學生學習的歷程。亦即，透過經歷不同的學習經驗，來調整原有對數學知識的觀點，並對理論上數學學習的歷程有更具體的理解，進而改變原有的數學教學意象。期許藉由教師數學教學意象的改變，使數學教育的改革能夠落實，也使學生能接受更高品質的數學學習。

意象和信念類似，都受到過去經驗的影響，不僅很早就建立與發展，對教學的影響很大，而且也不容易被改變（Rodriguez, 2005）。過去，許多研究都嘗試透過不同的方法來改變職前教師的信念，但成效並不理想（Grootenboer, 2008; Stuart & Thurlow, 2000）。然而，意象強調了「經驗」是意象發展的基礎，從學習經驗改變的觀點來看，或許可以瞭解參與教師為何在修習普通數學課程後，意象會有所移動。而學習經驗的改變，一方面可能是因為張教授課程內容的規劃符合教師的能力基礎，在「有點難又不太難」的情況下，引發教師探究和討論概念的意願；另一方面則可能是小組討論實施的方式，讓教師在相互支持的環境下，減輕過去對於數學學習產生的焦慮。再加上適度的學習壓力（要通過才能畢業，拿到普通教師的證書），使教師保持學習的動力，發展學習的情感，並形成課後相互支持與協助的數學學習社群。適當的挑戰、相互支持的學習環境，以及以概念理解為主的教學，使得普通數學的課程形塑出充滿對話、思考、溝通與推理的學習環境，並在思考與對話的歷程中進行數學概念的釐清。這樣的學習環境和經驗，是大多數教師從未親自體驗，只是從理論上獲得的，也因為如此，才讓教師在經歷不同的學習經驗中，引發內在的反省和改變（Lavy & Shriki, 2008），進而改變原有的數學教學意象。雖然教師的教學意象有所移動，但不可否認地，教學現場存在包括測驗、

時間、班級經營以及家長接受度等限制因素的影響（Agudelo-Valderrama, 2008; Gainsburg, 2008; Stein et al., 2007）。教師的教學意象改變後，回到現場是否如問卷後測中所說，願意實施以理解為目的的數學教學？抑或是又起了什麼樣的變化或發展？這部分是本研究較為不足之處，可以做為未來研究探討的主題和方向。

參考文獻

- 林佩璇 (2000)。個案研究及其在教育研究上的應用。載於中正大學教育學研究所 (主編), *質的研究方法* (頁239-262)。高雄: 麗文。
- [Lin, P. H. (2000). The introduction and application of case study on educational research. In Graduate Institute of Education, National Chung Cheng University (Ed.), *Qualitative research* (pp. 239-262). Kaohsiung: Li-Wen.]
- 陳向明 (2004)。社會科學質的研究。臺北: 五南。
- [Chen, H. M. (2004). *Qualitative research in social science*. Taipei: Wu-Nan.]
- 陳李綱 (2005)。個案研究: 理論與實務。臺北: 心理。
- [Chen, L. C. (2005). *Case study: Theory and practice*. Taipei: Psychological.]
- 陳國泰 (2000)。國小初任教師實際知識的發展之研究。國立高雄師範大學教育學系博士論文, 未出版, 高雄。
- [Chen, K. T. (2000). *The study on practical knowledge development of elementary novice teachers*. Unpublished doctoral dissertation, National Kaohsiung Normal University, Kaohsiung.]
- 普通數學編輯小組 (2000)。普通數學。臺中: 瑞和堂。
- [Editor Group. (2000). *General mathematics*. Taichung: Rui-He Tang.]
- 鍾靜 (2005)。論數學課程近十年來之變革。教育研究月刊, 133, 124-134。
- [Chung, C. (2005). Analyzing mathematics curriculum evolving of Taiwan in tens years. *Journal of Education Research*, 133, 124-134.]
- Agudelo-Valderrama, C. (2008). The power of Colombian mathematics teachers' conceptions of social/institutional factors of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 68(1), 37-54.
- Anderson, C. W. (2003). How can schools support teaching for understanding in mathematics and science? In A. Gamoran, C. W. Anderson, P. A. Quiroz, W. G. Secada, T. Williams, & S. Ashmann (Eds.), *Transforming teaching in math and science: How schools and districts can support change* (pp. 3-21). New York: Teachers College.
- Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (2002). *Becoming a reflective mathematics teacher: A guide for observations and self-assessment*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Bishop, A. J. (1988). Mathematics education and culture. *Educational Studies in*

- Mathematics*, 19(2), 179-191.
- Bullough Jr, R. V. (1992). Beginning teacher curriculum decision making, personal teaching metaphors, and teacher education. *Teaching & Teacher Education*, 8(3), 239-252.
- Bullough Jr, R. V., & Knowles, J. G. (1991). Teaching and nurturing: Changing conceptions of self as teacher in a case study of becoming a teacher. *Qualitative Studies in Education*, 4(2), 121-140.
- Calderhead, J., & Robson, M. (1991). Images of teaching: Student teachers' early conceptions of classroom practice. *Teaching & Teacher Education*, 7(1), 1-8.
- Clandinin, D. J. (1986). *Classroom practice: Teacher images in action*. London, UK: The Falmer Press.
- Clark, C. M., & Peterson, P. L. (1986). Teachers' thought processes. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (2nd ed., pp. 255-296). New York: MacMillan.
- Elbaz, F. L. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London, UK: Croom Helm.
- Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 199-219.
- Grootenboer, P. (2008). Mathematical belief change in prospective primary teacher. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), 479-497.
- Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhabit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.
- Johnston, S. (1990). Understanding curriculum decision-making through teacher images. *Curriculum studies*, 22(5), 463-471.
- Johnston, S. (1992). Images: A way of understanding the practical knowledge of student teachers. *Teaching & Teacher Education*, 8(2), 123-136.
- Kilpatrick, J., & Silver, E. A. (2000). Unfinished business: Challenges for mathematics educator in the next decades. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 223-235). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lavy, H., & Shriki, A. (2008). Investigating changes in prospective teacher's views of a 'good teacher' while engaging in computerized project-based learning. *Journal of*

- Mathematics Teacher Education*, 11(4), 259-284.
- Lin, Y. W. (1994). Early childhood student teachers' images and their classroom practice. *Journal of National Taipei Teachers College*, 7, 733-846.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Gweenwich, CT: Information Age.
- Rodriguez, A. J. (2005). Teachers' resistance to ideological and pedagogical change: Definitions, theoretical framework, and significance. In A. J. Rodriguez & R. S. Kitchen (Eds.), *Preparing mathematics and science teachers for diverse classrooms: Promising strategies for transformative pedagogy* (pp. 1-16). Mahwa, NJ: Laurence Erlbaum Associates.
- Ross, J. A., McDougall, D., Hogaboam-Gray, A., & LeSage, A. (2003). A survey measuring elementary teachers' implementation of standards-based mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(4), 344-363.
- Sfard, A. (1998). The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing? In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 491-511). Dodrecht, MA: Kluwer Academic.
- Silver, E. A., Mesa, V. M., Morris, K. A., Star, J. R., & Benken, B. M. (2009). Teaching mathematics for understanding: An analysis of lessons submitted by teachers seeking NBPTS certification. *American Educational Research Journal*, 46(2), 501-531.
- Stein, M. K., Remillard, J., & Smith M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Gweenwich, CT: Information Age.
- Steinbring, H. (1998). Epistemological constraints of mathematical knowledge in social learning settings. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 513-526). Dodrecht, MA: Kluwer

Academic.

- Stuart, C., & Thrulow, D. (2000). Making it their own: Preservice teachers' experiences, beliefs, and classroom practices. *Journal of Teacher Education, 51*(2), 113-121.
- Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chavez, O., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 247-280.
- Weber, S., & Mitchell, C. (1996). Drawing ourselves into teaching: Studying the images that shape and distort teacher education. *Teaching and Teacher Education, 12*(3), 303-313.
- Willoughby, S. S. (2000). Perspectives on mathematics education. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 1-15). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.