

合作反省思考的數學解題 教學模式及其實徵研究

劉錫麒

(花蓮師院副教授兼教務長)

數學教育的目標之一是培養能夠從事有效數學思考的學生，本項目標因傳統教學深受聯結論的影響而難以實現，本研究針對這項問題，提出合作反省思考的教學模式，期對數學教學的改進有所助益。

本研究的方法以理論分析和實徵研究為主。理論分析的目的在探索並形成教學理論模式；實徵研究的目的則在進行教學實驗，以了解本教學模式的成效。

本研究之主要結果如下：

1. 合作反省思考是知識建構的主要機制。
2. 合作反省思考的教學程序包括三個階段：示範、合作解題活動、及應用與討論。期望學生在社會支持的活動下，能逐漸獲得獨立進行數學思考的能力。
3. 根據實徵研究的結果，發現本教學模式在教導數學解題上是有效而適切的。不過為使教學模式更能適應學生的個別差異，合作解題活動的安排宜更具彈性。

培養能思考與善於思考的人是數學教育的重要目標之一，但是數學教學長期受聯結論的影響，教學模式偏重以機械練習和僵硬的程序來教導思考技能，以刺激反應的聯結來取代關係的理解與發現，以致一直無法實現預期的目標。本研究針對這項問題，提出合作反省思考的數學解題教學模式，期對數學教學的改進有所助益。

一、合作反省思考教學模式的 理論基礎

「合作反省思考教學模式」係在知識建構論的基礎上而發展的。在此基礎上，本教學模式結合了「合作」和「反省思考」兩個知識建構的中介歷程，兼顧教學歷程的認知與社會兩個層面。茲將本教學模式的理論基礎簡述如下：

(一)反省思考是建構知識的心理機制

合作反省思考模式從Dewey (1916) 所主張的「有意義的學習需要以反省思考為主要機制」出發，經與認知心理學與人工智慧的相關概念—「後設認知」和「執行」互相比較，發現反省思考包括兩種功能：一是提升解題效率，二是建構解題知識。訊息處理論對解題歷程的研究結果，可以支持反省思考在提升解題效率上所扮演的控制性功能；從認知發展、訊息處理論與專家發展的研究，則可以了解反省思考在知識學習上的建構性功能。

(二)合作是建構知識的社會實際活動

就知識論與科學哲學的相關觀點來說，知識是在社會互動、合作的實際活動下，藉談論來激發反省思考並獲取共識的成果。Rorty (1979) 與Habermas (1971) 等人強調知識的發展是從理性討論以獲取共識的歷程，他們的觀點是：知識的形成建立在社會互動的基礎上。Kuhn (1962) 的研究則明確指出科學知識是科學家在派典(paradigm)的主導下，以解題為實際活動所建構出來的。

(三)合作活動提供激發並支持反省思考的脈絡

從認知發展的理論中，Piaget (1970) 認為同儕互動中不同觀點的存在是激發反省思考，促成認知結構重組的因素；Vygotsky (1978) 則主張社會互動提供社會層面反省思考的脈絡，兒童在成人或優秀同

儕的支持下，會逐漸的將人際間的心理歷程轉為個體內在化的心理歷程。

(四)合作反省思考是建構數學知識與意義的實際活動

認知人類學的研究指出，實際活動是知識建構歷程中不可分割的一環，尤其是知識的意義更是在活動的脈絡中孕育而成的。這種觀點在數學解題教學上的涵義是，必須注意教室的實際活動對學生而言具有何種意義。由於反省思考與合作活動是知識建構的重要機制，本研究認為：要有效的培養學生數學思考的能力，必須在教室建立合作反省思考的實際活動。

二、合作反省思考的數學解題 教學模式

在上述的理論基礎下所發展的合作反省思考數學解題教學模式，目的在教導學生從解題的活動中，學習數學解題歷程與策略。更重要的，是期望在教室中建立思考的脈絡，使學生認知數學知識的性質是數學思考。

(一)合作反省思考模式的教學策略

合作反省思考教學模式的主要課題，是建立一個相互支持、彼此談論的歷程來監控解題並激發反省思考活動。為達成是項目的，教學模式採用以下三個主要策略：

1. 口述思考的策略

在合作解題的歷程中，互動的產生及持續的先決條件，是使內在的心理歷程具體可見。根據思考歷程研究方法的敘述，可以引伸出一種具體的教學策略：口述思考（*talking about thinking*）。所謂口述思考，就其功能來說含有控制性和建構性兩層意義。控制性的口述思考和放聲思考法一樣，只是將解題時的思考內容用語言表達出來，以促進思考歷程的自我覺察；建構性口述思考則不僅表達思

考內容而已，還要為認知行動說明理由，以提供從省思中建構知識的機會。

2. 教師示範與支持的策略

從鷹架理論的觀點來說，思考方法的學習需要思考的社會脈絡並仰賴專家的支持與協助。如何創造這種學習情境，已經有不少學者注意傳統行業成功地培養學徒的歷程，並企圖將它應用到教室活動中。

學徒養成歷程中的主要關鍵因素，是專家的示範和支持。Lave（1988）指出，師傅先經示範來提供統整的概念模式，學徒再一面觀察一面學習，假以不斷回饋與教導的支持，終而學得一項複雜技能。此一歷程中的示範是相當重要的步驟，它有三個主要功能：(1)提供學習者練習前一個前導組體（*advance organizer*）；(2)提供使教學者回饋、校正、和提示具有意義的解釋性架構；(3)提供學習者獨自練習時的內在指引（Collins et al., 1989）。

3. 同儕相互詢問的策略

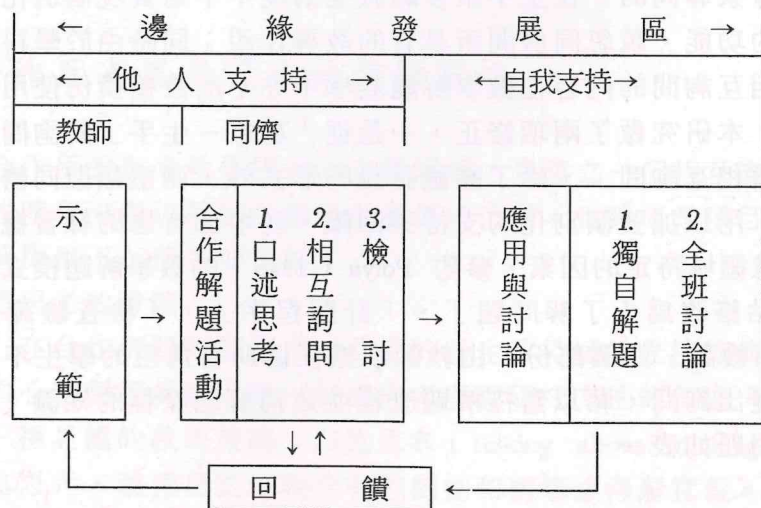
使用發問來激發團體討論的功能，是提供理性討論以獲取共識的脈絡。但是如何使同儕能彼此激發省思並相互支持，則相互教學法（*reciprocal teaching*）的教學策略是值得借鏡的（Palinscar et al., 1984）。相互教學法成功的關鍵是在閱讀的脈絡下，教師有系統的協助學生練習以省思為核心的閱讀理解策略。然而基本上這種教學法係專家導向的，在生手眾多的教室情境中不易實現個別化支持和回饋的功能，疏忽同儕間所具有的教導作用；同時由於學科性質不同，相互詢問的內容在數學解題教學中亦不能直接模仿使用。有鑒於此，本研究做了兩項修正，一是從「專家—生手」的詢問擴大為「同儕相互詢問」，除了團體討論的形式外，側重類似同儕教導的活動，用以加強個別化的支持與回饋，並增加省思的練習機會；二是考慮領域特定的因素，參酌 Polya（1945）的數學解題模式，將詢問重點修改為「了解問題」、「計劃程序」、「檢查驗算」、和「回顧檢討」四個部份，由教師或擔任協助者角色的學生不斷向解題者提出詢問，藉以監控解題歷程並建構解題歷程的知識。主要詢問的問題如表一：

表一 相互詢問的主要問題

了解問題	已知是什麼？ 未知是什麼？ 是否畫圖看看？
計劃程序	有沒有熟悉的類似問題？ 是否簡化問題？ 是否列表看看？ 找一找有無規律？
檢查運算	驗算了嗎？
回顧檢討	是否回頭檢查每一個步驟？ 可不可以用其他的方法？ 用什麼方法比較好？ 做對或做錯的原因是什麼？

(二)合作反省思考模式的教學活動

在主要教學策略下，「合作－反省思考」教學活動的程序大體可以分成三個步驟來進行：示範、合作解題、應用和討論。圖 1 是依照發展順序與教學步驟所畫成之教學活動架構圖：



圖一 「合作－反省思考」教學活動架構

茲分別就圖一的教學階段說明如後。

1. 示範

示範是指教師執行解題時，要使學生能觀察並模仿解題歷程的概念模式。為了示範，教師須將內隱的心理活動外在化，也就是使用口述思考的方式，將解題歷程顯示出來俾供學生的觀察。教師解題時，有兩個歷程要特別加以強調：(1)解題策略的應用，並說明行動的條件和理由；(2)反省思考的示範，包括監控的與建構的。例如在解題歷程中提出可用的各種策略，說明如何和為何選擇某一策略；故意犯錯以呈現檢查和校正等行動的重要。

2. 合作解題

學生觀察教師的示範後，即開始同儕合作解題活動。最初可採兩人一組的方式，一位是解題者，另一位是協助者，相互輪流。為使談論能夠順利展開，學生需要在解題時口述思考；為使支持能夠具有反省思考的形式，解題活動除相互詢問外，再使用解題作業紙與檢討等方式來進行。

(1)相互詢問

相互詢問教學策略之所以重要，係來自 Vygotsky (1978) 「邊緣發展區」的概念，它在教學上的涵義是使兒童在他人支持下所能誘發的認知歷程，逐漸內化為獨自發展的成就。在此理論下，教學是學習責任由教師引導轉換為學生自主的歷程。

相互教學法根據上述的理論觀點，以教師詢問的方式協助學生練習閱讀的策略以及閱讀歷程的省思，然後視學生的進展將詢問的責任轉移至學生身上。「合作－反省思考」模式則改為直接由同儕承擔詢問的責任，這種改變係基於以下兩項理由：

- a. 詢問活動本身是練習解題策略與反省思考的方式；
- b. 同儕詢問較能針對解題歷程適時提供支持與回饋。

(2)解題作業紙

解題作業紙之設計，目的在幫助解題者與協助者循序的學習數學解題策略，並產生解題歷程的反省思考。作業紙的形式如圖二：

數學解題作業紙 班級： 座號： 姓名：

題目：

了解問題	問題的「已知」、「未知」是什麼？
計劃程序	要用什麼策略？
檢查運算	運算正確嗎？
回顧檢討	1. 回想你所用的方法，為什麼用這些方法？ 2. 能不能用其他方法？ 3. 你做對或做錯的原因是什麼？

圖二：數學解題作業紙

(3) 檢討

檢討在問題解決後進行，目的在促進建構性的反省思考。討論的重點是解題階段中「回顧檢討」的有關問題，希望使學生更加注意並了解認知行動與其結果的關聯，以產生有意義的學習。

3. 應用與討論

應用與討論階段的性質是一種教學評鑑，也是對學習活動所作的反省思考。其目的如下：

(1) 診斷與修正學生的錯誤

應用活動的目的是了解學生能否在沒有支持的情況下，獨自解決合作解題階段的類似作業。學生若能順利解題，表示已經獲得預定的解題知識；否則就需要根據學生的表現重新示範或再繼

續合作解題。然而不管獨自解題的成敗，應用活動之後應即進行團體討論。教師在本階段須肩負比較重要的角色，除了引導學生注意自己與別人解題歷程的差異，歸納解題策略的應用原則外，亦須站在專家的立場診斷與修正學生的錯誤。同時由於學生間的對話受知識與認知能力的限制，雖然可能彼此達成一些共識，卻侷限在較低水準或錯誤的方向上，教師自應藉著提示與引導，讓學生產生新的了解或發覺錯誤。

(2) 實施教學評鑑

「合作－反省思考」教學模式的重要特色是除了教學數學思考，也同時教導學生學習如何學習。換句話說，本教學模式引導學生在合作活動中，監控並校正自己的學習進程，並從學習歷程的反省思考中建構學習策略。

三、合作反省思考數學解題 教學模式的實徵研究

實徵研究的目的是為了解本模式的教學效果，並探討同儕分組的性質對教學的影響。

(一) 研究方式

本研究採實驗研究法。實驗組實施「合作－思考」教學，但為探討同儕性質對教學效果的影響，實驗組又分成同質與異質兩組。控制組則實施「解說－接受」教學。實驗組和控制組經過教學的實驗處理後，分別接受後測。

(二) 對象

參加教學實驗的學生係在花蓮師院附設實驗國小五年級學生中抽選，隨機分派為兩個實驗組和一個控制組。兩個實驗組中，一為同質組，一為異質組，皆接受「合作－思考」教學；控制組則進行「解說－接受」教學。以上三組人數皆為36人，男女各半。

(三) 實驗教學的實施

實驗教學的內容是國小數學第十一冊中「怎樣解題」的兩個單元。係利用每週作業指導和團體活動時間進行，教學活動共需八次，每次40分鐘。

1. 「合作－思考」組的教學程序

分成三個階段：

- (1) 示範和合作解題階段，共計三次教學活動，以教師示範和學生練習為主。
- (2) 合作解題階段，教師不再示範，完全由學生合作進行。
- (3) 綜合討論階段，最後兩次進行學生獨自解題，再做全班討論。

2. 「解說－接受」組的教學程序

教學之進行是由教師先講解例題，學生接著做練習。

(四) 評量方法與工具

本研究使用數學解題知識測驗、數學解題反省思考晤談測驗、和數學信念問卷，來評量受試者的解題知識和數學信念。結果以單因子變異數統計法和 Scheffe' 法的事後比較，來驗證有關假設。

(五) 主要發現

實徵研究的主要發現如下：

1. 「合作－思考」教學在學生數學解題與反省思考能力的學習上，要比「解說－接受」教學更有效果。在數學信念方面，接受本模式教學的學生亦比較能產生有意義的發展。也就是說，學生逐漸了解數學知識的性質與意義是思考或解題，對自己的數學學習也較具信心和自我效能感。
2. 一般研究教學成效的影響因素上，分組方式的同質或異質是重要的變項。本研究的結果顯示，同質組學生和異質組學生在數學解題策略知識、反省思考與數學信念的得分上皆無明顯不同。這項發現顯示合作反省思考教學模式的實施，由於重點在於反省思考的支持，同質或異質的分組方式對教學效果並未產生重大影響。

以上結果所顯示的理論意義是：

1. 合作省思教學模式的特徵，是結合省思的認知歷程與合作的社會歷程，由於兩者具有知識建構上的統整關係，因此產生教學效果的解釋性機制是－合作反省思考。
2. 同儕分組的同質或異質雖然可能使談論型態略有偏重，但都能產生並支持省思活動。鷹架論與衝突論兩個理論模式的共通處頗值注意。

參考書目

- 劉錫麒 (民80)，合作反省思考數學解題教學模式及其實徵研究。國立台灣師範大學教育研究所博士論文。
- Dewey, J. (1916). *Democracy and education*. N.Y.: Macmillan.
- Habermas, J. (1971). *Knowledge and human interest*. Boston: Beacon.
- Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: Chicago University Press.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Boston: Cambridge.
- Palincsar, A. S., & Brown, A. L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and monitoring strategies. *Cognition and Instruction, 1*, 117-175.
- Piaget, J. (1970). Piaget's theory. In P.H. Mussen (Ed.), *Carmichael's manual of child psychology (3rd ed.)* (Vol.1, pp.703-732). N.Y.: Wiley.
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. N.J.: Princeton University Press.
- Rorty, R. (1979). *Philosophy and the mirror of nature*. Princeton: Princeton University Press.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.