

# 台灣地區高職教師人數需求之 灰色預測模式

洪欽銘·李龍鏞

近幾年來，由於灰色系理論廣泛地在學術界上應用，而且都已獲得相當好的成果，本文提出如何建立灰色預測模式 (grey forecasting model)，利用少數據的歷史資料推知未來，將該模式應用於預測台灣地區高職教師未來幾年所需要的人數預測，分別以全數據及部份數據建模，全數據模型利用歷史資料為72~81年共10筆，預測82~89年，結果82年及83年實際來到時平均相對誤差僅0.63%，部份數據模型利用歷史資料為78~81年共4筆，預測82~89年，結果82年及83年實際來到平均相對誤差為0.95%，本文再與時間數列模式 (ARIMA models) 及模糊時間數列 (fuzzy time series) 預測結果相比，結果發現本文所提的灰色預測模式方法可獲得誤差低、計算簡單等滿意的結果。

**關鍵字：**灰色系統、灰色預測、灰色預測模式、高職教師人數

**Keywords:** Grey System、Grey Forecasting、Grey Forecasting Model、Numbers of Teacher in Vocational High School

## 壹、緒言

在師資培育法立法通過以後，首當其衝的是師範教育體系的開放，在此一政策的主導之下，未來將會有更多元的教師培育管道，如此一來，可能會

產生教師供給過剩。有關的研究所於民國六十四年及六十五年，曾發表「台灣省未來六年國小需求預測」之報告。其後陸續有更多的專家對需求的估計，大都以平均法或指數平滑法進行，結果與實際需求有顯著差異 (謝澄漢，民74)。對此缺失，改採用單變量時間數列模型，雖然時間數列具有預測的優點，但在預測上卻受到需大量資料的限制，預測的資料要有足過的長歷史資料 (廖敏治，民83)。民國八十年，台大教授吳柏林、張鈿富等採用灰色預測，結果比傳統的 ARIMA 模型省去了龐雜巨量的矩陣計算和合適的

隨著科技的發展，描述系統變化的理論試圖利用隨機理論與模糊理論來解釋事物。模糊集論著重事物的隨機性。模糊集論解決系統複雜性與精確性間之矛盾。除模糊性與隨機性外，還存在一類灰色性，也就是系統的信息不完全。系統的隨機性與模糊性是具有確定性的 (鄧聚龍，1982)，所以系統灰色性不僅具有確定性以外的諸多特性。例如，系統變化的過程都是經常發生的。因此灰色性

所謂預測，就是根據客觀事物的發展規律，用科學的方法和技術手段，對於未來的發展趨勢作出合理的假設及判斷 (楊宏澤、梁國華，1988)。預測的對象出現且沒有延伸性的未來系統，且同時處於連續變化中的系統，是灰色預測的對象。灰色問題。利用灰色系統理論來解決 (鄧聚龍，1988)。

近幾年來，灰色預測方法已廣泛地應用於經濟、社會、教育、運動訓練、工業

產生教師供給過剩。有關師資需求量的推估方式，國立台灣師範大學教育研究所於民國六十四年及六十六接受台灣省教育廳委託由黃昆輝教授主持完成「台灣省未來六年國小需求量推估研究」，首開我國師資人力系統推估之先河。其後陸續有更多的專家投入推估預測的研究，傳統教師培育機構對教師需求的估計，大都以平均成長率法或普查法來推估，其預測與實際結果常有顯著差異（謝澄漢，民74），民國八十一年馬信行教授（馬信行，民81）針對此缺失，改採用單變量時間數列法來預估中學教師人數，的確使誤差值降低不少，雖然時間數列具有簡潔易懂及短期預測精度高的優點，但時間數列在預測上卻受到需大量資料的限制（理論上最少要有50筆資料），而且用以預測的資料要有足過的長度，否則容易產生較大的誤差（吳柏林、張鈿富、廖敏治，民83）。民國八十三年中華民國第二屆模糊理論與應用研討會，政大教授吳柏林、張鈿富等提出模糊時間數列與台灣地區中學教師人數需求之預測，結果比傳統的ARIMA模式所預測的結果還要好，但模糊數列需克服煩雜巨量的矩陣計算和合適的信念準確度，有可能阻礙長期預測的可能性。

隨著科技的發展，描述及設計系統之理論及方法層出不窮，信息論與控制論試圖利用隨機理論與統計方法，用來研究與描述信息之不確定性，主要著重事物的隨機性。模糊集合論試圖利用精確數學來描述模糊現象，同時解決系統複雜性與精確性間之矛盾，主要著重事物之模糊性。然而系統除了模糊性與隨機性外，還存在一種範圍更廣泛、內容更深刻之特性，就是系統的灰色性，也就是系統的信息不完全及不確知的現象。灰色系統理論是假定系統的隨機性與模糊性是具有灰色性的兩種不同方面的不確定性（莊文南，民82），所以系統灰色性不但包含了隨機性與模糊性，而還包含了這兩種不確定性以外的諸多特性。例如社會系統之人為干擾、經濟系統之浮動虛報等，都是經常發生的。因此灰色系統理論能夠廣泛地應用於不同領域。

所謂預測，就是根據客觀事物的過去和現在所發展的規律，借助科學的方法和技術手段，對於未來的發展趨勢和狀況進行描述和分析，並形成科學的假設及判斷（楊宏澤、梁天旗、黃慶連、史光榮，民83）。對於一個尚未出現且沒有延伸性的未來系統，必然是既有已知信息，又有未知或未確知的信息，且同時處於連續變化的動態之中。所以說「預測未來」本質上是個灰色問題。利用灰色系統理論所建立的GM(1,1)模型的預測，就稱為灰色預測（鄧聚龍，1988）。

近幾年來，灰色預測方法已應用在很多領域中，如經濟、農業、生態、氣象、教育、運動訓練、工業控制…等幾十個領域，且獲得良好的效果，今已

引起科學界越來越多的關注和探索。概括言之，灰色預測具有以下之特點（鄧聚龍，1992）：

1. 灰色預測需要數據少。一般情況下，不須大量的歷史數據，而是根據實際狀況選擇適當量的數據，進行累加生成，將雜亂無章的數據理出一定的規律來，甚至只用四個數據就可建模，進行預測，且能得到較滿意的結果。
2. 灰色預測方法計算簡單。雖然GM模型建立在較深的高等數學基礎上，但他的計算步驟並不繁瑣，多數可用手工完成，特別是借助於計算機，應用已有的程序，使用更為迅速。
3. 一般情況下，灰色預測不須太多的關聯因素，因而資料比較容易取得，且工作量大大減少。
4. 灰色預測既可用於近期、短期，也可用於中長期預測。
5. 灰色預測精度高，比其他方法的模型計算誤差較小。

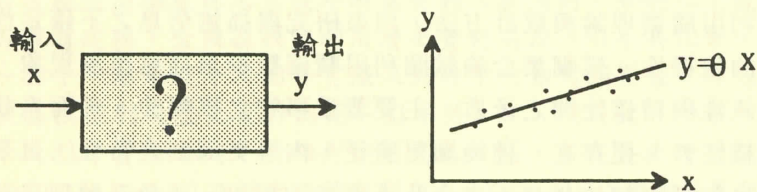


圖 2-1 一個輸入、一個輸出直線迴歸例

## 貳、灰色系統的數學基礎

灰色系統所應用的數學基礎是系統判別 (System Identification) 中的最小平方方法 (Least-Square Methods)。最小平方方法其主要的目的是想從一堆輸入與輸出的資料中找出系統的關係式；例如一個輸入，一個輸出的系統，由一些已知的資料中，找出其輸入與輸出間的關係式  $y = \theta x$ ，其中  $\theta$  即是特定的系統參數，也稱為斜率，如圖 2-1 所示。相同的道理對  $n$  個輸入、一個輸出的系統，可由如圖 2-2 來表示。

輸入

$X_1$

$X_2$

...

$X_n$

圖 2-2 多

圖 2-2 中輸入量為  $X_1, \dots, \theta_n$ ，輸出為  $y$ 。系統的轉性方程式來表示：

$$y = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots + \theta_n X_n$$

為了確定系統的參數  $\theta$ ，分別對  $x$  及  $y$  進行了  $m$  次的觀測，因此，為了要能求得適得的數據為：

$$y(i), X_1(i), X_2(i), \dots, X_n(i)$$

可得如下  $m$  個代數方程

$$y(i) = \theta_1 X_1(i) + \theta_2 X_2(i) + \dots + \theta_n X_n(i)$$

上式 (2-2) 可寫成下列矩陣式

$$X \cdot \theta = Y$$

由於實際量測時， $X$  與  $Y$  式中的等式應不成立，為了求取誤差  $e_i = y(i) - [\theta_1 X_1(i) + \theta_2 X_2(i) + \dots + \theta_n X_n(i)]$ ，則

$$e = Y - X \cdot \theta$$

其中  $e = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_m]^T$

為使  $e$  能最小我們要求平面上要求斜率為 0：

$$\frac{\partial e^2}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} = 0$$

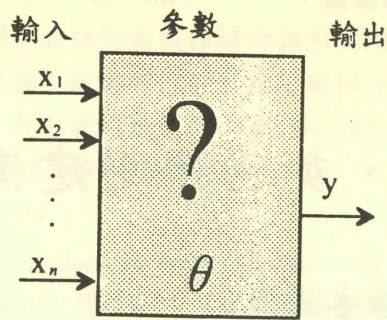


圖 2-2 多個輸入、一個輸出的回歸系統例

圖 2-2 中輸入量為  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ，系統待估參數為  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ，輸出為  $y$ 。系統的輸入、輸出和參數之間的關係可以假定用如下的線性方程式來表示：

$$y = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots + \theta_n X_n \quad (2-1)$$

為了確定系統的參數  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ，設在  $t_1, t_2, \dots, t_m$ ，共  $m$  個時刻，分別對  $x$  及  $y$  進行了  $m$  次的觀測，要解  $n$  個變項，至少要有  $n$  個方程式才可以求解，因此，為了要能求得適切的解， $m$  取值最好遠大於  $n$ ，即  $m > n$ ，設觀測所得的數據為：

$$y(i), X_1(i), X_2(i), \dots, X_n(i) \quad , i=1,2,\dots,m$$

可得如下  $m$  個代數方程式

$$y(i) = \theta_1 X_1(i) + \theta_2 X_2(i) + \dots + \theta_n X_n(i) \quad , i=1,2,\dots,m \quad (2-2)$$

上式 (2-2) 可寫成下列矩陣的形式，則有

$$X \cdot \theta = Y \quad (2-3)$$

由於實際量測時， $X$  與  $Y$  可能有儀表或人為的量測誤差，所以實際 (2-3) 式中的等式應不成立，為了解決並表示此一問題，定義了一誤差向量：

$$e_i = y(i) - [\theta_1 X_1(i) + \theta_2 X_2(i) + \dots + \theta_n X_n(i)] \quad , i=1,2,3,\dots,m \quad (2-4)$$

$$e = Y - X \cdot \theta \quad (2-5)$$

其中  $e = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_m]^T$

為使  $e$  能最小我們要求  $e^2 = e^T e = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_m^2$  應最小，也就是在  $\theta$  與  $e$  的平面上要求斜率為 0：

$$\frac{\partial e^2}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} = 0 \quad (2-6)$$

經由計算可求得預測參數：

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2-7)$$

## 參、灰色預測建模

### 一、灰色系統的基本運算

所謂灰色系統 (Grey System) 係對於系統內狀態及變數之特性無法完全掌握的系統，而灰色系統的理論就是利用離散不規則的數據經由累加生成後之新數據，使其產生具有指數形式之規律性，因此可建立灰微分方程式模式來近似擬合此一新的數據，生成函數是灰色建模及預測的基礎，茲將灰色系統基本運算分別說明如下：

(一) 累加生成 (Accumulated Generating Operation 簡稱 AGO)

利用累加生成 (AGO) 法是將資料少，無規律性的數據轉換為單調遞增數列，以減少其隨機性，並使其具有平滑性以減少人為或雜訊因素的影響。即將原始數列各時刻數據依序累加以得到新的數據與新的數列，結果略似積分的效果，每生成一次就可使數據更規律化一些，生成分佈可由圖 3-1 表示。

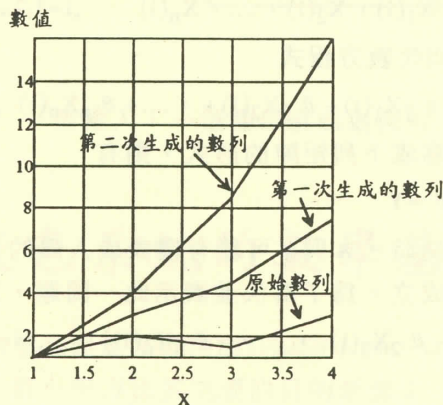


圖 3-1 累加生成分佈圖

在運算上，若將原始數列表示為： $X^{(0)}(i) = \{X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \dots, X^{(0)}(n)\}$ 。  
則第一次累加生成的數列表示為： $X^{(1)}(i) = \{X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), \dots, X^{(1)}(n)\}$ 。  
其關係式可表示為：

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(0)}(i)$$

若一次累加生成或第三次...等累加生成相同的，累加 r 次生成關係式稱

$$X^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(r-1)}(i)$$

(二) 累減生成 (Inverse Accumulated Generating Operation)

累減生成主要功能為累加生成之逆運算。當然累加生成數據列， $\alpha^{(i)}$

$$\alpha^{(0)}(X^{(r)}(k)) = X^{(r)}(k)$$

$$\alpha^{(1)}(X^{(r)}(k)) = \alpha^{(0)}(X^{(r)}(k))$$

$$\alpha^{(2)}(X^{(r)}(k)) = \alpha^{(1)}(X^{(r)}(k))$$

:

$$\alpha^{(i)}(X^{(r)}(k)) = \alpha^{(i-1)}(X^{(r)}(k))$$

累加及累減生成轉換

$X^{(0)}$



圖 3-2 原始數

(三) 灰微分方程式

由於累加生成後的數據來擬和，一般建立的灰微分方程表系統階次，m 代表系統階次，最常用，底下以 GM(1,1) 為例。

設一階多變量白化微分方程

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + aX_1^{(1)} = b_1X_2^{(1)} + \dots$$

(3-7) 式中，a 稱為

$X_2, X_3, \dots, X_m$  為相關變數

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(0)}(i) \quad \text{稱 1-AGO} \quad (3-1)$$

若一次累加生成後的新數據列仍無明顯規律可循時，可以做第二次或第三次...等累加生成數列直到呈指數規律分佈為止。

相同的，累加  $r$  次生成的數列為： $X^{(r)}(i) = \{X^{(r)}(1), X^{(r)}(2), \dots, X^{(r)}(n)\}$ 。

累加  $r$  次生成關係式稱  $r$ -AGO 表示如下：

$$X^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(r-1)}(i) \quad (3-2)$$

(二) 累減生成 (Inverse Accumulated Generating Operation 簡稱 IAGO)

累減生成主要功能是将累加生成還原成原始數據，也可以說是累加生成之逆運算。當然累加生成  $r$  次則累減生成也要  $r$  次。設  $X^{(r)}(k)$  為  $r$  次累加生成數據列， $\alpha^{(i)}(X^{(r)}(k))$  為  $k$  次累減生成數據列。轉換方成式如下：

$$\alpha^{(0)}(X^{(r)}(k)) = X^{(r)}(k), k=1, 2, \dots, n \quad (3-3)$$

$$\alpha^{(1)}(X^{(r)}(k)) = \alpha^{(0)}(X^{(r)}(k)) - \alpha^{(0)}(X^{(r)}(k-1)) \quad (3-4)$$

$$\alpha^{(2)}(X^{(r)}(k)) = \alpha^{(1)}(X^{(r)}(k)) - \alpha^{(1)}(X^{(r)}(k-1)) \quad (3-5)$$

:

$$\alpha^{(i)}(X^{(r)}(k)) = \alpha^{(i-1)}(X^{(r)}(k)) - \alpha^{(i-1)}(X^{(r)}(k-1)) \quad (3-6)$$

累加及累減生成轉換過程如圖 3-2 所示：

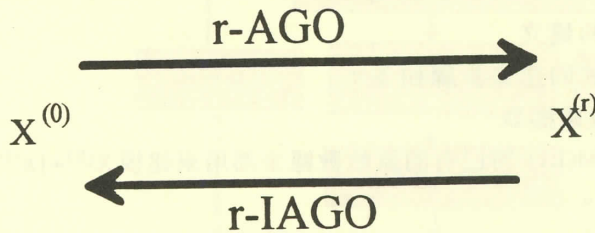


圖 3-2 原始數列  $x^{(0)}$  與生成數列  $x^{(r)}$  之轉換關係圖

(三) 灰微分方程式

由於累加生成後的數據列成指數形式，所以可以建立一微分方程式來擬和，一般建立的灰色模型 (Grey model) 都以  $GM(n, m)$  來表示，其中  $n$  代表系統階次， $m$  代表系統變量。實際在系統的應用中，一階微分方程式最常用，底下以  $GM(1, m)$  為例，闡述灰微分方程式的建立。

設一階多變量白化微分方程式為：

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + aX_1^{(1)} = b_1X_2^{(1)} + \dots + b_{m-1}X_m^{(1)} \quad (3-7)$$

(3-7) 式中， $a$  稱為發展係數， $b_1, b_2, \dots$  稱為灰作用量， $X_1$  為預測變數， $X_2, X_3, \dots, X_m$  為相關變數。

依導數定義：

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_1^{(1)} - X_1^{(1)}(K-1)}{\Delta t} \quad (3-8)$$

當  $\Delta t \rightarrow 1$  時

$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} = \frac{\Delta X_1^{(1)}}{\Delta t} = X_1^{(1)}(k) - X_1^{(1)}(k-1) = d^{(1)}(X_1^{(1)}(k)) = X_1^{(0)}(k)$  表示  $\frac{dx_1^{(1)}}{dt}$  是  $X_1^{(1)}(k)$  的一次累減生成 (IAGO)。當  $X_1^{(1)}(k-1)$  變化到  $X_1^{(1)}(k)$ ，而  $\Delta t$  很短時， $X^{(1)}$  的背景值 (background values) 可取  $X_1^{(1)}(k-1)$  與  $X_1^{(1)}(k)$  的平均值， $X_1^{(1)} = z^{(1)}(k) = \frac{1}{2} [X_1^{(1)}(k-1) + X_1^{(1)}(k)]$ 。

則 (3-7) 式可改由灰微分方程式來表示：

$$X_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = b_1 X_2^{(1)}(k) + b_2 X_3^{(1)}(k) + \dots + b_{m-1} X_m^{(1)}(k) \quad (3-9)$$

由 (3-9) 之灰微分方程式，透過參數估計的技巧，決定各係數的值，並據以建立 GM(1,m) 模式進行預測。

## 二、灰色預測模式的建立

透過灰色系統理論建立灰色模式而進行預測，稱為灰色預測。灰色預測模式建立之流程圖如圖 3-3 所示：基本上可分為三大部份：1、GM(1,m) 模式，2、殘差數列驗證模式，3、殘差預測修正模式，本研究只使用一階單變數 GM(1,1)。

### (一) GM(1,1) 模式的建立

GM(1,1) 模式的建立步驟如下：

步驟 1：數據擷取

(1) 全數據 GM(1,1)：將已有的原始數據全部用來建模  $X^{(0)} = \{X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \dots, X^{(0)}(n)\}$ 。

(2) 部份數據 GM(1,1)：將原始數列  $X^{(0)}$  中選取四筆以上連續數據，用來建模。

(3) 新息數據 GM(1,1)：將新的信息加入原始數列，建構新的 GM(1,1)。

$$X^{(0)} = \{X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \dots, \underbrace{X^{(0)}(n+1)}_{\text{新的信息}}\}。$$

新的信息

(4) 等維新息數據 GM(1,1)：將新的信息加入原始數列，同時淘汰舊的數據，數列維持等維 GM(1,1)。

$$X^{(0)} = \{\underbrace{X^{(0)}(1)}_{\text{扣除的信息}}, X^{(0)}(2), \dots, X^{(0)}(n), \underbrace{X^{(0)}(n+1)}_{\text{新增的信息}}\}。$$

扣除的信息

新增的信息

步驟 2：累加生

$$X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(0)}(i)$$

步驟 3：建立灰

$$X^{(0)}(k) + az^{(1)}(k)$$

其中  $Z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}$

步驟 4：建立數

矩陣形式：

步驟 2：累加生成 (AGO)

$$X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(0)}(i) \quad k=1,2,\dots,n$$

步驟 3：建立灰微分方程式

$$X^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (3-10)$$

其中  $z^{(1)}(k) = 1/2 [X^{(1)}(k-1) + X^{(1)}(k)]$

步驟 4：建立數據矩陣，參數估計最小平方方法  
矩陣形式：

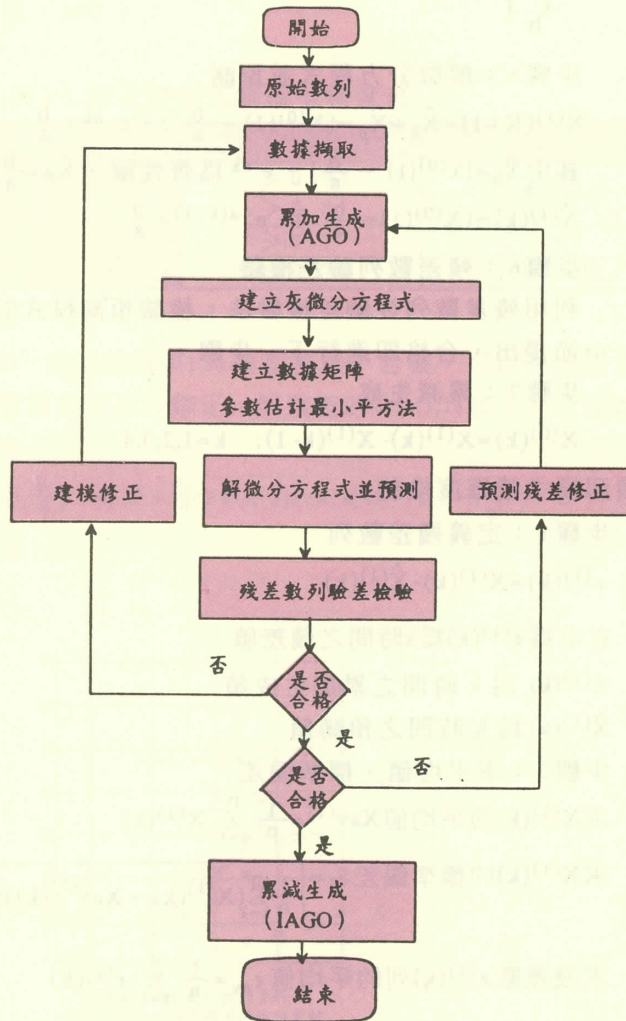


圖 3-3 灰色系統預測流程圖



$$\text{若 } B = \begin{pmatrix} -\frac{X^{(1)}(1)+X^{(1)}(2)}{2} & 1 \\ -\frac{X^{(1)}(2)+X^{(1)}(3)}{2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{X^{(1)}(n-1)+X^{(1)}(n)}{2} & 1 \end{pmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, Y = \begin{pmatrix} X^{(0)}(2) \\ X^{(0)}(3) \\ \vdots \\ X^{(0)}(n) \end{pmatrix}$$

則式(3-10)可改寫為  $B \cdot \hat{\theta} = Y$  (3-11)

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$
 (3-12)

步驟5：解微分方程式並預測

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \hat{X}_h + \hat{X}_p = (X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}) \cdot e^{-ak} + \frac{b}{a}$$
 (3-13)

其中  $\hat{X}_h = [X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}] \cdot e^{-ak}$  為齊性解， $\hat{X}_p = \frac{b}{a}$  為特解

$$\hat{X}^{(1)}(k) = (X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}) \cdot e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}$$
 (3-14)

步驟6：殘差數列驗差檢驗

利用殘差數列後驗差檢驗法，檢驗預測模式的準確度，本文將於下一小節提出，合格即進行下一步驟。

步驟7：累減生成

$$X^{(0)}(k) = X^{(1)}(k) - X^{(1)}(k-1); \quad k=1,2,3,4$$
 (3-15)

(二) 預測模式精確度檢驗

步驟1：定義殘差數列

$$\epsilon^{(1)}(k) = X^{(1)}(k) - \hat{X}^{(1)}(k)$$
 (3-16)

式中為  $\epsilon^{(1)}(k)$  為 k 時間之殘差值

$X^{(1)}(k)$  為 k 時間之累加生成值

$\hat{X}^{(1)}(k)$  為 k 時間之預測值

步驟2：求平均值、標準偏差

$$\text{求 } X^{(1)}(k) \text{ 的平均值 } X_{av}^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X^{(1)}(k)$$
 (3-17)

$$\text{求 } X^{(1)}(k) \text{ 的標準偏差 } S_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X^{(1)}(k) - X_{av}^{(1)}(k))^2}$$
 (3-18)

$$\text{求殘差數 } \epsilon^{(1)}(k) \text{ 列的平均值 } \epsilon_{av} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \epsilon^{(1)}(k)$$
 (3-19)

$$\text{求殘差數列的標準偏差 } S_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\epsilon^{(1)}(k) - \epsilon_{av}^{(1)}(k))^2}$$
 (3-20)

步驟3：求後驗差

求後驗差比值 C

求小誤差機率 P =

C 越小，表示 S1 越

亦即表示離散程度大

程度較低，預測值與

小、P 越大越好，因此

表3-1 所示 (鄧聚龍，

表3-

預測精度等級
好 (Good)
合格 (Qualified)
勉強 (Just)
不合格 (Unqualified)

(三) 預測殘差修正

假使按原數據  $X^{(0)}$  建

的 GM(1,1) 模型，對原

GM(1,1) 進行修正得：

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = (X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}) \cdot e^{-ak} + \frac{b}{a}$$

$$\delta(k-1) = \begin{cases} 1, & k \geq i \\ 0, & k < i \end{cases}$$

圖3-1

步驟3：求後驗差比值、小誤差機率

$$\text{求後驗差比值 } C = \frac{S_2}{S_1} \quad (3-21)$$

$$\text{求小誤差機率 } P = \text{Prob}(|\epsilon^{(1)}(k) - \epsilon_{av}| \leq 0.6475s_1) \quad (3-22)$$

C 越小，表示 S1 越大、S2 越小。S1 越大則累加生成數據列異變數大，亦即表示離散程度大，相對的 S2 越小，表示殘差數列異變數小，亦離散程度較低，預測值與實際值之誤差較小。一般來講，好的預測要求 C 越小、P 越大越好，因此可按照 C 與 P 的大小，將預測精度分為四個等級如表 3-1 所示（鄧聚龍，1987）：

表 3-1 綜合評定預測模型精度表

預測精度等級	P	C
好 (Good)	> 0.95	< 0.35
合格 (Qualified)	> 0.8	< 0.5
勉強 (Just)	> 0.7	< 0.65
不合格 (Unqualified)	≤ 0.7	≥ 0.65

(三) 預測殘差修正

假使按原數據  $X^{(0)}$  建立的 GM(1,1) 模型檢驗不合格，可以考慮建立殘差的 GM(1,1) 模型，對原模型進行修正，將殘差的 GM(1,1) 模型加入原數據列的 GM(1,1) 進行修正得：

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = (X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}) \cdot e^{-ak} + \frac{b}{a} + \delta(k-i)(-a')(\epsilon^{(0)}(1') - \frac{b'}{a'}) \cdot e^{-a'k} \quad (3-23)$$

$$\delta(k-i) = \begin{cases} 1, & k \geq i \\ 0, & k < i \end{cases} \quad (3-24)$$

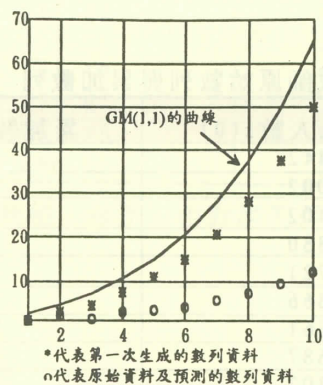


圖 3-1 的  $X^{(0)}$ ， $X^{(1)}$ ，GM(1,1) 示意圖

## 肆、高職教師人數需求灰色預測模式比較分析

### 一、高職教師人數之灰色預測模型

本節將依第三章所描述的類型建構(1)全數據模型與(2)部份數據模型，首先將71學年度到82學年度的教師人數列於表4-1(a)（教育部，民83）。

4-1(a) 高職教師人數（71學年度到82學年度）（單位：人）

學年度	71	72	73	74	75	76
教師人數	14,442	15,002	15,402	15,880	16,721	17,366
學年度	77	78	79	80	81	82
教師人數	17,661	17,687	17,703	18,000	18,332	18,836

#### (一)全數據模型

全數據模型是利用71學年到80學年共10年的歷史資料建模，81~82年可作為驗證之用，預測準確度以相對誤差百分比(Relative Percentage Error)來表示。定義為：

$$RE(\%) = \frac{|X^{(0)}(k) - \hat{X}^{(0)}(k)|}{X^{(0)}(k)} \times 100\% \quad (4-1)$$

$X^{(0)}(k)$ ：真實高職教師人數。

$\hat{X}^{(0)}(k)$  預測高職教師人數。

灰色預測全數據GM(1,1)模式演算步驟如下：

步驟1：首先將在職教師人數原始資料作一次累加生成處理，如表4-1(b)所示：

表4-1 (b) 高職教師原始數列與累加數列（單位：人）

學年度	原始教師人數 $x(0)$	累加教師人數 $x(1)$
71	14,442	14,442
72	15,002	29,444
73	15,402	44,846
74	15,880	60,726
75	16,721	77,447
76	17,366	94,813
77	17,661	112,474
78	17,687	130,161
79	17,703	147,864
80	18,000	165,864

步驟2：利用表4

$$B = \begin{pmatrix} -21943 & 1 \\ -37145 & 1 \\ -52786 & 1 \\ -69086.5 & 1 \\ -86130 & 1 \\ -103643.5 & 1 \\ -121317.5 & 1 \\ -139012 & 1 \\ -156864 & 1 \end{pmatrix}$$

步驟3：解微方

解方程式(3-12)得

代入預測方程式

$$\hat{X}^{(1)}(k) - (X^{(0)}(1) -$$

步驟4：殘差後驗

代入公式(3-16)

3588，小誤差機率  $P=1$

步驟5：累減生成

代入公式(3-15)得

表4-1 (c) 高職教師

學年度	累加預測教
71	14,442
72	29,444
73	44,846
74	60,726
75	77,447
76	94,813
77	112,474
78	129,474
79	147,474
80	165,864

茲將全數據模型預測值

步驟2：利用表4-1 (b)中的 $X^{(1)}$ 代入(3-11)式，求出B與Y

$$B = \begin{pmatrix} -21943 & 1 \\ -37145 & 1 \\ -52786 & 1 \\ -69086.5 & 1 \\ -86130 & 1 \\ -103643.5 & 1 \\ -121317.5 & 1 \\ -139012 & 1 \\ -156864 & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 15002 \\ 15402 \\ 15880 \\ 16721 \\ 17366 \\ 17661 \\ 17687 \\ 17703 \\ 18000 \end{pmatrix}$$

步驟3：解微方程式並預測

解方程式(3-12)得： $a = -0.0229$ ， $b = 14822.2$ 。

代入預測方程式

$$\hat{X}^{(1)}(k) = (X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}) \cdot e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}$$

步驟4：殘差後驗差檢驗

代入公式(3-16 ~ 22)經殘差後驗差檢驗，所得殘差後驗差比值 $c = 0$ 。

3588，小誤差機率 $P = 1$ ，所得模型精度為合格(參考表3-1)。

步驟5：累減生成

代入公式(3-15)得表4-1(c)

表4-1 (c) 高職教師累加預測數列與累減預測數列 (單位：人)

學年度	累加預測教師人數 $\hat{X}^{(1)}$	累減預測教師人數 $\hat{X}^{(0)}$
71	14,442	14,442
72	29,769.15	15,327.15
73	45,450.92	15,681.77
74	61,495.51	16,044.59
75	77,911.32	16,415.8
76	94,706.92	16,795.61
77	111,891.12	17,184.2
78	129,472.9	17,581.78
79	147,461.46	17,988.56
80	165,866.21	18,404.75

茲將全數據模型預測值、殘差、相對誤差百分比列於表4-2。

表 4-2 全數據模型之預測值、殘差、相對誤差百分比

學年度	實際值 $x^{(0)}$	預測值 $\hat{x}^{(0)}$	殘差 $\epsilon$	相對誤差百分比 (%)
71	14,442	14,442	0	0
72	15,002	15,327	-325	2.17
73	15,402	15,682	-280	1.82
74	15,880	16,045	-165	1.04
75	16,721	16,416	305	1.83
76	17,366	16,796	570	3.29
77	17,661	17,184	477	2.69
78	17,687	17,582	105	0.59
79	17,703	17,989	-286	1.61
80	18,000	18,405	-405	2.25

(二) 部份數據模型

部份數據模型是利用四筆資料建檔，本文以 78 學年到 81 學年的歷史資料建模，82 年的歷史資料當驗證，按上述的方法解灰微分方程得： $a = -0.0175$   $b = 17235$ ，其解為  $\hat{x}^{(1)}(k+1) = 1004427 \cdot e^{0.01747k} - 986739$ ，殘差後驗差比值  $c = -0.0175$ ，小誤差機率  $P = 1$ ，所得模型精度等級為好（請參考表 3-1），茲將部份數據模型預測值、殘差、相對誤差百分比列於表 4-3。

表 4-3 部份數據模型預測值、殘差、相對誤差百分比

學年度	實際值 $x^{(0)}$	預測值 $\hat{x}^{(0)}$	殘差 $\epsilon$	相對誤差百分比 (%)
78	17,687	17,687	0	0
79	17,703	17,698	5	0.03
80	18,000	18,009	-9	0.05
81	18,332	18,327	5	0.03

(三) 兩種模型對高職教師未來需求之推估如表 4-4

表 4-4 高職教師人數之預測（單位：人）

學年	全數據模型		部份數據模型	
	歷史資料	預測值	歷史資料	預測值
72	15,002	15,002	X	X
73	15,402	15,887	X	X
74	15,880	16,199	X	X
75	16,721	16,518	X	X
76	17,366	16,842	X	X
77	17,661	17,173	X	X
78	17,687	17,511	17,687	17,687
79	17,703	17,855	17,703	17,698
80	18,000	18,206	18,000	18,009
81	18,332	18,563	18,332	18,327
82	*	18,928	*	18,650
83	*	19,300	*	18,978
84	*	19,679	*	19,313
85	*	20,066	*	19,653
86	*	20,460	*	19,999
87	*	20,862	*	20,352
88	*	21,272	*	20,711
89	*	21,690	*	21,075

二、高職教師需求

中華民國第二屆模糊

廖敏治等提出模糊時間數  
糊時間數列與 ARIMA 模式  
測結果資料，再與本文研  
後為驗證數，如表 (4-5)(a)

表 4-5(a) 灰色預測模式（全  
果相對誤差比較表

學年	真實值	灰色模
78	17,687	17,5
79	17,703	17,8
80	18,000	18,2
81	18,332	18,5
82	18,836	18,9
83	19,152	19,3
84	*	19,6
85	*	20,0
86	*	20,4
87	*	20,8
88	*	21,2
89	*	21,6
驗證平均相對誤差(%)		

表 4-5(b) 灰色預測模式  
預測結果相對誤差

學年	真實值	灰色模
78	17,687	17,687
79	17,703	17,698
80	18,000	18,009
81	18,332	18,327
82	18,836	18,650
83	19,152	18,978
84	*	19,313
85	*	19,653
86	*	19,999
87	*	20,352
88	*	20,711
89	*	21,075
驗證平均相對誤差(%)		

## 二、高職教師需求推估模式比較分析

中華民國第二屆模糊理論研討會，國立政治大學教授吳柏林、張鈿富、廖敏治等提出模糊時間數列與台灣地區中學教師人數需求之預測，此文對模糊時間數列與 ARIMA 模式預測做了詳細介紹，本文引用此篇對高職教師之預測結果資料，再與本文研究的灰色預測模式進行相對誤差比較，八十二年以後為驗證數，如表(4-5)(a)(b)所示：

表 4-5(a) 灰色預測模式(全數據)、模糊時間數列與 ARIMA 對高職教師之預測結果相對誤差比較表

學年	真實值	灰色模式	誤差(%)	ARIMA	誤差(%)	模糊模式	誤差(%)
78	17,687	17,511	1	17,450	1.3	18,155	2.65
79	17,703	17,855	0.86	17,696	0.04	17,882	1.01
80	18,000	18,206	1.14	18,283	1.6	17,898	0.51
81	18,332	18,563	1.26	18,399	0.37	18,493	0.88
82	18,836	18,928	0.49	18,628	1.1	18,986	0.8
83	19,152	19,300	0.77	18,892	1.36	19,366	1.12
84	*	19,679		19,128		19,839	
85	*	20,066		19,338		20,468	
86	*	20,460		19,525		21,097	
87	*	20,862		19,693		21,726	
88	*	21,272		19,842		22,415	
89	*	21,690		19,975		23,044	
驗證平均相對誤差(%)			0.63		1.23		0.96

表 4-5(b) 灰色預測模式(部份數據)、模糊時間數列與 ARIMA 對高職教師之預測結果相對誤差比較表

學年	真實值	灰色模式	誤差(%)	ARIMA	誤差(%)	模糊模式	誤差(%)
78	17,687	17,687	0	17,450	1.3	18,155	2.65
79	17,703	17,698	0.03	17,696	0.04	17,882	1.01
80	18,000	18,009	0.05	18,283	1.6	17,898	0.51
81	18,332	18,327	0.03	18,399	0.37	18,493	0.88
82	18,836	18,650	0.99	18,628	1.1	18,986	0.8
83	19,152	18,978	0.91	18,892	1.36	19,366	1.12
84	*	19,313		19,128		19,839	
85	*	19,653		19,338		20,468	
86	*	19,999		19,525		21,097	
87	*	20,352		19,693		21,726	
88	*	20,711		19,842		22,415	
89	*	21,075		19,975		23,044	
驗證平均相對誤差(%)			0.95		1.23		0.96

## 伍、結論

灰色系統理論對於灰量、灰過程處理，不是找機率分佈或求統計規律，而是用生成的方法，將數列弱化隨機及增強規律性，利用生成數來建立模型，此乃灰色系統理論重要特點之一，本文獲至結論如下：

1. 本文是以72學年到81學年的平均成長趨勢來模擬預測82學年到89學年，由原始數列（歷史資料）的型態可以看出是呈遞增的情況，離散性不高，只需一次累加生成，模型精度等級皆合格以上。

2. 全數據模型利用歷史資料為72~81年共10筆，預測82~89年，結果82年及83年實際來到時平均相對誤差僅0.63%，部份數據模型利用歷史資料為78~81年共4筆，預測82~89年，結果82年及83年實際來到平均相對誤差為0.95%。

3. 本文研究結果再與時間數列模式及模糊時間數列預測結果相比，結果發現，以同樣預測82年為例，本文所提的全數據灰色預測模式誤差0.49%為最低，所以此方法可獲得誤差低、計算簡單的效果。

4. 未來高中高職學生比、師生比與教育經費等因素，都可能因政策改變而影響歷史規率，此需改變系統內參數與輸入值的設定，才能有接近現況的模擬值。

## 參考書目

- 中華民國教育統計（民83），教育部編印。
- 史開泉、吳國威、黃有評（民82），灰色信息關係論，台北：全華。
- 呂光華（1993），礦業灰色系統，煤炭工業出版社。
- 馬信行（民81），我國各級學校師資之預測，政治大學學報，65，頁63-80。
- 吳柏林、張鈿富、廖敏治（民83），模糊時間數列與台灣地區中學教師人數需求之預測，中華民國第二屆模糊理論與應用研討會，頁329-331。
- 吳俊明（民83），「利用系統動態模式做電腦模擬之一研究--高職師生人數的預測」，國立台灣師範大學工業教育研究所碩士論文，頁53-87。
- 阮忠信（民81），水文灰色系統模式之研析及其與參數優選法之應用，國立台灣大學農業工程學研究所碩士論文，頁104-118。

- 教育部技職司（民81），台灣地區高職師資需求推估研究報告，台灣師範大學。
- 曾國雄、胡宜珍（民83），灰色系統理論與關聯分析之應用，中華教育研究，頁1-10。
- 洪欽銘（民84），灰色系統理論與應用之探討，省體育學報，頁1-10。
- 莊文（民82），微分水文灰色系統模式之研究，工業教育研究所碩士論文，頁4-10。
- 楊宏澤、梁天旗、黃慶連（民84），灰色系統模式，中華民國教育研究，頁1-10。
- 莊豔蕙（民80），應用灰色系統理論於高職師資需求之探討，省體育學報，頁1-10。
- 翁瑞彬（民84），灰色預測與應用，工業教育研究所碩士論文，頁1-10。
- 鄧聚龍（1987），灰色系統基礎理論，北京：中國人民教育出版社。
- 鄧聚龍（1988），灰色控制系統，北京：中國人民教育出版社。
- 鄧聚龍（1992），灰色系統理論與應用，北京：中國人民教育出版社。
- 鄧聚龍（1992），灰色預測與應用，北京：中國人民教育出版社。
- 謝澄漢（民74），我國高職師資需求之預測，國立台灣師範大學工業教育研究所碩士論文，頁1-10。
- Deng, J. (1989), Introduction to Grey System Theory, pp.1-23.
- Yang Bingzhai (1992), A New Grey System Model, pp.305-313.
- 洪欽銘，現任國立台灣師範大學教授。
- 李龍鏞，現任台北市立教育大學教授。

教育部技職司(民81)，台灣地區高級中等學校81~90年度職業科教師需求  
量推估研究報告，台灣省立鳳山高級商工職業學校承辦。

曾國雄、胡宜珍(民83)，公車系統營運與服務績效指標擷取之研究—灰色  
關聯分析之應用，中華民國第二屆模糊理論與應用研討會，頁49-55。

洪欽銘(民84)，灰色系統理論，國立台灣師範大學工業教育研究所碩士班  
講義。

莊文(民82)，微分水文灰色模式之研究與應用，國立台灣大學農業工程學  
研究所碩士論文，頁4-18。

楊宏澤、梁天旗、黃慶連、史光榮(民83)。電力系統年尖峰負載預測之灰  
色系統模式，中華民國第十五屆電力工程研討會，頁729-734。

莊豔蕙(民80)，應用灰色理論對李福恩十項全能成績的因素分析與成績預  
測的探討，省體育學報，第19期，頁191-228。

翁瑞彬(民84)，灰色預測法在PID控制系統上的新應用，國立台灣師範大學  
工業教育研究所碩士論文，頁5-21。

鄧聚龍(1987)，灰色系統基本方法，華中理工大學出版社。

鄧聚龍(1988)，灰色控制系統，華中理工大學出版社。

鄧聚龍(1992)，灰色系統理論教程，華中理工大學出版社。

鄧聚龍(1992)，灰色預測與決策，華中理工大學出版社。

謝澄漢(民74)，我國高級工業職業學校師資供需問題研究，國立台灣師範  
大學工業教育研究所碩士論文，頁23-25。

Deng, J. (1989), Introduction to Grey System Theory, *The Journal of Grey System*, vol.1,  
pp.1-23.

Yang Bingzhai (1992), A New Algorithm for GM(1,1), *The Journal of Grey System*, vol.  
4, pp.305-313.

洪欽銘，現任國立台灣師範大學工業教育研究所副教授

李龍鏞，現任台北市立木柵高工教師(師大工研所研究生)