參考書目

方淑眞（民 84），用全語文教孩子作文。**教育心，第八期**，54-56。

沈添鉦（民 80），簡介「全語言」的語文教學。**教師之友，第 32 卷第四期**，27 - 31。

森林小學綠皮書，（民 82）。台北：人本基金會。

黃秀文（民 83），全語淺探。**教師之友，第 35 卷第四期**，9 - 11。

趙涵華（民 83），整體語言教語—理論、研究、特質、及問題。**台北市立師範學院學報，第 25 期**，389 - 402。

趙涵華（民 84），全語文教育的精神。**教育心，第八期**，52 - 53。

羅明華（民 84），整體語文教育。**教師之友。第 36 卷第一期**，5 - 9。

Chen, Yueh-Miao. "The whole language approach to language instruction: philosophical beliefs, theory, and practice." *Journal of national Chung Cheng university Vol.5*(1994): 365-397.

Gollasch, Frederick v. (1982) ***Language and literacy: The selected writings of Keeneth S. Goodman.*** Vol.1. Boston: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Goodman, Kenneth S. (1967). "Reading: A psycholinguistic guessing game." ***Journal of the reading specialist Vol.6***(4):p.126-135.

Goodman, Kenneth S. (1986). ***What's whole in whole language.*** Portsmouth. New Hampshire: Heinemann Educational Books, Inc.

Goodman, Kenneth S. (1991). Teachers as learners-whole language teachers. In Goodman, Kenneth S.,Bird, Lois Brides & Goodman, Yetta M. (Eds). ***The whole language catalog.*** Santa Rosa, CA.: American School Publisher. 任秀媚譯。**全語言教學學術研討會手册**。主辦單位：台灣省國民教師研習會，八十五年元月八日 - 九日。

Goodman, Yetta M., Dorothy J. Watson, Carolyn L. Burke. (1987). ***Reading miscue inventory.*** New York: Richard C. Owen Publishers, Inc.

Harste, Jerome C. (1993). ***Manuscript.***

Harste, Jerome C., and Kathy Short. (1988). ***Creating classrooms for authors.*** Portmouth, NH: Heinemann.

Harste, Jerome C, Virginia A. Woodward, and Carolyn L. Burke. (1984). ***Language stories and literacy lessons.*** Portsmouth, N.H. Heinemann Educational Books.

Short, Kathy G. and Carolyn Burke (1991). ***Creating curriculum: teachers and students as a community of learners.*** Portsmouth, New Hampshire: Heinemann Educational Books.

Weaver, Constance (1990). ***Understanding whole language.*** Portsmouth, NH: Heinemann.

曾月紅，國立花蓮師範學院語教系副教授

教育研究資訊，1998.1，6(1)，頁 91-105

數學哲學及其對數學教育的影響與啓示

黃永和

因鑑於數學哲學對數學教育有重要的意義與影響，本文乃透過文獻分析以絕對論及易誤論兩大典範來描述數學哲學的現代發展，並依據相關理論與實証研究結果來闡述數學哲學在教師、學生及學校與社會等層面的影響，最後針對數學教育目標、數學課程、數學教學與學習、師資培育與教師進修、教育研究等五方面提出數點啓示與建議。

關鍵字：數學哲學、數學教育

Keywords: Philosophy of mathematics、Mathematics education

壹、前言

哲學會影響教育的目的、方法、課程的編製與施行，它常被視爲是教育的理論基礎之一，然而以往的教育學者大都將焦點放在整體的教育哲學上，而未對各學科的教育哲學進行探究，這方面的盲點可稱爲教育哲學研究中「遺漏了的派典」(missing paradigm)。

「數學哲學」(philosophy of mathematics) 是哲學的分支，是以數學爲主題的一門哲學學科或研究領域，所要探討的問題是數學知識中具有哲學性質的部份，主要包括了「數學究竟是什麼？」、「數學知識的本質是如何？」、「數學知識是如何形成與發展的？」等。探討這些問題的答案，並不只是有助於數學或哲學本身的發展，同時對數學教育也有重要的影響與意義——猶如 Thom(1972) 所認爲的數學教學皆是以數學哲學爲基礎；亦猶如 Dossey(1992) 所指出的人們所持有的數學本質與角色之看法將影響學校數學課程、教學與研究之發展。基於數學哲學的重要性，本文擬對現代數學哲學的發展作一探討，並申述其對數學教育的影響與啓示。

貳、數學哲學的現代發展

誠如上述，數學哲學是以數學爲主題的一門哲學學科或研究領域，然而這樣的學科或研究領域本身並不固守某種觀點，而是開放地讓持有各種不同信念、意向與態度的哲學家進行研究，因此也自然而然地存有各式各樣的數學哲學觀。從數學史與數學哲學史中，我們確實可以發現數學哲學觀是多彩多姿、論見互異，甚至是彼

* 本文感謝國立新竹師院國民教育研究所所長簡紅珠教授的指導。

此衝突的。特別是本世紀六、七十年代以來所興起的數學哲學之哥白尼式革命，將原本被視爲絕對客觀無誤與靜態的數學知識本質，推向可誤與動態變化的層面，數學哲學的此一轉向不僅對數學界與哲學界本身造成莫大的衝擊，實際上也影響了人類的整個文化與知識狀況，同時也突顯了數學哲學在教育上的重要意涵。本節乃以「絕對論」(absolutism) 與「易誤論」(fallibilism)(Ernest，1991，1994a；Lerman，1990) 兩大對立典範來說明現代數學哲學的轉向與發展，並以此作爲本文下一節的探討基礎。

一、絕對論

傳統以來，數學知識一直被認爲是由確定與不可質疑的眞理所組成的，其特性是客觀的、精確的、無誤的、抽象的、與價值無關的。這樣的觀點常是不同學派的共識，例如：雖然數學被唯心論者認爲是人的先天洞察、上帝給人的啓示、人對理念的認識，被唯物論者認爲是人對客觀世界規律性的認識、是經驗的總結與昇華，被二元論者認爲是人用先天的感知能力對經驗作用的總結結果，但是他們都共同地肯定數學是客觀的眞理（張景中，民 85）。

就現代的數學發展史而言，自 19 世紀末期以來，許多數學家爲了解決一向被視爲推理嚴密、結論永遠正確的數學之中所存在的矛盾與悖論 [1](paradox)，便開始將焦點放在數學哲學的探討上，企圖爲數學重新建立一個永恆的、可靠的基礎，因此興起了三大學派，茲摘述各派主要論點如下：

㈠邏輯主義 (Logicism)

此派以羅素及懷德海 (A. N. Whitehead) 爲代表，其主張主要有二：其一是所有的數學概念最後都能被簡化爲邏輯概念，其二是所有的數學眞理都能透過邏輯推論的規則與公設而獲得証明 (Ernest，1991)。換言之，他們把數學看成是邏輯學的一個分支，認爲數學是完全邏輯化的學科，並且堅信只要從邏輯出發便能爲數學打造一個具有確定性與精確性的嚴格知識體系。

㈡直覺主義 (intuitionism)

此派以布魯爾 (L. E. J. Brouwer) 爲代表，他基於康德的直覺（ intuition，或譯爲「直觀」）概念，認爲唯有直覺能建構出來的論証與觀念才是可以接受的，數學的對象也必須在有限步驟之內建構出來才可以認爲是存在的。布魯爾依其觀點否認了大部份無法藉由直覺建構的古典數學之有效性，而重新建立了一個以直覺爲基礎的新數學體系。

註 1：例如羅素所提出的理髮師悖論：「某村的一位理髮師，他只給村上一切不給自己刮臉的人刮臉。那麼，他給不給自己刮臉呢？」

㈢形式主義 (formalism)

此派以希爾伯特 (D. Hilbert) 爲代表，他認爲數學能被表述爲形式化的系統，並且可透過形式化的証明來保障數學的眞理性。希爾伯特以形式化基礎作爲發展數學的工作，通常被稱爲「希爾伯特綱領」：他首先進行抽象化的工作，使概念全變成符號，命題全變成公式，推理全變成形式規則，如此便把數學各部份徹底地變成各種形式化的公理系統；接著，再建立一個研究各種形式系統的元數學 (meta-mathematics)；最後，再用元數學理論來証明各數學分支的免於矛盾，使數學成爲一嚴格與精確的學科。

由上述分析可知，表面上此三大學派的主張雖然有極大的不同，但是潛在地它們存在著更多而且重要的共同假定，分析如下：

1. 絕對論：此三派皆假定數學能被某一套命題所表述，同時有一套驗証的程序可以用來保証他們的主張，並藉此命題與証明而建立起他們所認爲嚴格的數學知識。換言之，他們都相信有一穩固的眞理基礎可以作爲數學知識的根基，相信具有完全可靠的邏輯演繹、毫無瑕疵的証明，同時也認爲光靠証明的邏輯條件便足以建立數學知識，而不須考慮人或社會層面的因素 (Ernest，1994b)，此種數學知識主張可視爲是絕對論，不同於易誤論者的觀點。
2. 基礎主義 (foundationism)：他們都認爲數學哲學的角色是爲數學知識提供一系統的與絕對的可靠基礎，視合理化其所認可的觀點爲數學哲學的主要任務，因此分別以「邏輯公設」、「原始直覺的不証自明公設」、「元數學的直覺性確定原則」爲基礎，企圖由這些基礎來開展出全部的數學知識。此種數學哲學觀可稱爲基礎主義 (Ernest，1991)。
3. 靜態觀：在絕對論與基礎主義的觀點下，他們視數學體系爲靜態而統一且不可改變的產物，數學的發展只是眞理在數量上的單純累積（鄭毓信，1995；Thompson，1992），數學家所做的工作只不過是在數學的眞理大廈上添磚加瓦，數學知識中的漏洞只是技術上的細節，補起來就好了。
4. 歐幾里德式的 (Euclidean)：歐幾里德的「原本 (Element)」向哲學家們建議了一種獲取眞理的方法，亦即從少數幾條前提出發，用邏輯工具來証明結論，如果前提是眞理，則結論也會是眞理。此三大學派亦依此原則，「讓不可懷疑的眞值由頂部噴射出來，由上而下地流動，通過有效推論的維護眞值之安全渠道，而充滿整個系統」（Lakatos，1978，頁 28），拉卡托斯稱此種演繹邏輯爲歐幾里德式的，不同於假設－演繹的否証方式。
5. 理性主義：三大學派一致肯定邏輯上完美的理性思維之創造物（例如虛數、n 維空間、非歐幾何）應在數學上佔有優勢地位，因此分別以理性思維中的邏輯成份、直覺成份與形式化成份來極力追求數學的高度抽象化、形式化與公理

化，此乃理性主義在不同方向上變形擴張的結果（桂起權，1991），此種擴張使得數學與經驗、實踐完全脫離，斷絕了數學與人類實際活動之間的關係。

然而，絕對論者的努力終究是無法令人滿意的。就學理上而言，學者們開始對他們的共同假定感到質疑與批駁，例如愛因斯坦便不感興趣地稱此三大學派間的論爭爲「青蛙和老鼠之間的戰鬥」（王前，1991）；就實際上而言，他們本身都無法合理解決數學基礎的問題，1931 年哥德爾定理更表明了「眞」與「可証」是兩回事，否定了長久以來所認爲的「數學眞理都是可以証明的」的想法，結束了三大學派爲數學發展尋求可靠性基礎的幻夢。近代的數學哲學家更因新科學哲學、知識社會學、認知科學與後現代主義的影響，已逐漸揚棄絕對論而轉向支持易誤論。

二、易誤論

批評者認爲邏輯主義、形式主義與直覺主義等三大學派用以建立數學基礎的公設或原則都是未經過確証的，亦即這些公設或原則都只是一種假定，要使這些論點獲得支持必須對其假定加以檢証與考驗。然而，這些假定是否能加以檢証與考驗呢？此種可能性被某些學者加以否定。其中 Lakatos(1978) 便認爲任何依賴某一假定，並設法藉由証明該假定以建立數學的確定性時，將會導致無限的迴歸 (regression)，亦即我們永遠無法檢証最根本的假定，尋求數學的確定性必將導致無止境的循環。此種觀點成爲易誤論者反對數學知識具確定可能性的主要論點，他們直接反駁數學哲學之基礎主義學派的絕對性宣稱，認爲數學基礎不能成爲數學哲學研究的中心問題，他們超越基礎主義學派而思考絕對論無法回答的問題，堪稱爲數學哲學研究的後基礎主義 (post-fundationist)。

本文將以 Lakatos 的「擬經驗論」（Quasi-empiricism，或可譯爲「準經驗論」），以及 Ernest 的「社會建構論」(social constructivism) 來闡述易誤論的數學哲學觀。

㈠擬經驗論

Lakatos 認爲數學的概念與方法乃是根源於經驗事實，而非傳統以來人們所認爲的與經驗事實無關的理性思維產物，然而他也反對把數學完全等同於其它的經驗學科，因此他提出了數學是擬經驗的觀點，其論點主要如下（康宏逵譯，1987；舒煒光、邱仁宗，民 79；Ernest，1991；Lakatos，1978）：

1. 數學知識是易誤的：Lakatos 認爲數學並不是一種先驗的、無誤的學科，而是一種後驗的、可錯誤的、可改正的學科，因此擬經驗論者認爲沒有也不尋求數學的絕對確定性基礎。

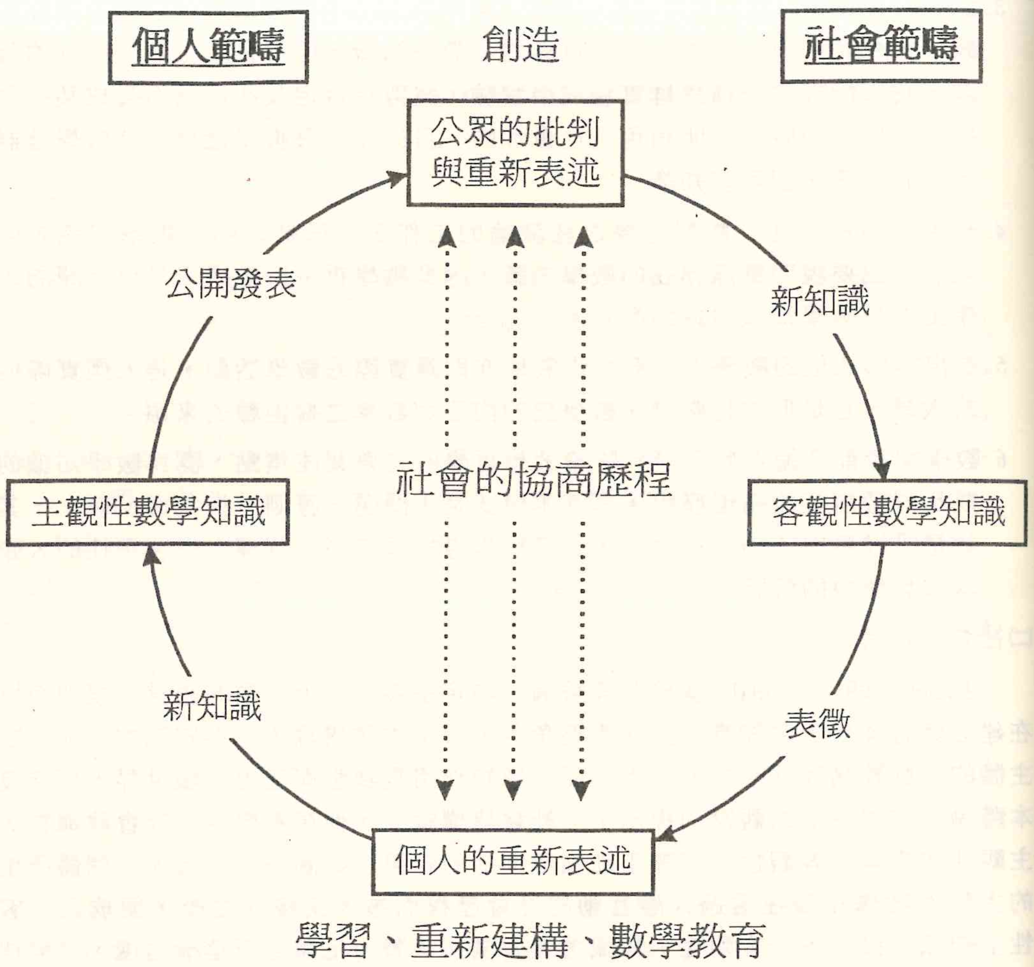
2. 數學是假設－演繹的系統：受到 Popper 在自然科學上所採用的否証法之影響，Lakatos 採取同樣的觀點，認爲數學是一個假設－演繹的系統。如此的系統不同於歐幾里德式的演繹邏輯，也不同於歸納主義的模式，而是強調觀察與經驗對於演繹出發點的否証作用，即透過批判與反駁來不斷地修改已有的假設，以增加假設的眞實程度。Lakatos 描述此種模式是「假值的倒流，從結論由下而上傳遞到前提」（1978，頁 29）。
3. 証明的有限性與社會性：Lakatos 認爲數學証明並不能解決數學理論的眞理性問題，數學証明只可以增加「不可靠的」數學知識，但不會產生無可置疑的眞命題，它只能提供一種思維實驗或準實驗，爲暫時否定某些命題而贊成某些命題提供理由。同時，証明角色是社會性的，目的在說服數學社群，使數學社群能接受該知識、認可該知識。
4. 數學史的重要性：數學哲學之認識論的工作並不只是說明「數學知識如何可能」，也要說明實際存在的數學知識，因此數學哲學與數學史是分不開的，數學史即是數學知識演進的歷史。
5. 重視非形式化的數學：非形式化數學亦即是實際的數學活動，是人們實際使用的數學，它是形式化數學、數學史的內容與數學之擬經驗的來源。
6. 數學知識創造論：此乃擬經驗論數學哲學的主要關注焦點，認爲數學知識的形成是無數辯証的循環歷程，其基本模式是「問題－臆測－批判與反駁」，其口號是「增長與不斷的革命」，其目標是尋找具有高度解釋力與啓發性的大膽而富有想像力的假說。

㈡社會建構論

Ernest(1991，1994b) 基於擬經驗論、約定主義（主張人類的語言、規則與協商在建立與合理化數學知識上扮演重要角色）與根本建構論（認爲知識的形成是認知主體的主動建構而非被動的接受，而且認知作用是調整與適應經驗世界，而非發現本體論上的實在）的觀點而提出了「社會建構論」。他視數學爲一社會建構物，是主觀性知識與「客觀性」知識不斷循環創造的結果（如圖一）：首先，個體所創造的主觀性數學知識在透過人際互動的社會歷程而被大衆接受之後，便成爲「客觀性」知識；接著，「客觀性」知識透過表徵被個體內化與重新建構之後，又變成了個體的主觀性知識；然後，個體又以此主觀性知識作爲創造「客觀性」知識的基礎，如此不斷循環而建構出數學知識。其間，個人範疇與社會範疇之間有一互動的社會協商歷程，並導致彼此知識的重新表述。茲將社會建構論之假定與主張進一步說明如下：

1. 「客觀性」是社會性的：社會建構論的「客觀性」乃意指能被公衆所共同接受（包括未被明確表達出來的內隱性接受）的「人類心智之產物」，它是基於大

衆的、互爲主觀的 (intersubjective) 同意，是非絕對性的。互爲主觀的同意賦予了數學知識與數學對象獨特的生命力，使它們能獨立於任一個體的主觀性知識之外而「自主地存在」（此處所指之「自主地存在」乃指社會性的存在，而非某些理性論者所假定的「自存之實體」的存在——對社會建構論者而言，數學與善、惡、美價值一樣，都不具有永久不變與自存的實體）。



圖一　數學知識的社會建構（引自 Ernest，1991，頁 85）

2. 個體能主動建構適合 (fit) 外在世界的獨特主觀性知識：主觀知識是個體基於與世界（包括物質的與社會的世界）互動的基礎上，透過不斷地主動臆測、檢証或取代而形成與發展的。然而，猶如 Glasersfeld 所指出的「認知作用是調整與適應經驗世界」，外在的實體也對主觀知識的建構形成限制的作用，此種限制

使得主觀知識能夠適合外在世界，而確保主觀知識的可行性 (viability)。

3. 公衆批判與接受主觀知識的標準乃是基於「客觀的」數學與邏輯知識：主觀知識在公開發表之後，須接受公開的仔細檢証與批判，而檢証與批判的標準乃是基於「客觀的」數學與邏輯知識。然而，具有客觀標準並不意味著所有的批判都是合理的。

4. 數學知識的成長包括量的增加與質的改變：數學家在一已建立的數學理論之中進行研究與發展，使得現有理論能有新的成果與應用，如此將使數學知識體系在知識數量上有所增加。然而，數學家也將某一數學理論的概念與方法應用到其它的數學理論之中，或使原本不相關的理論產生了聯結而重新建構原有的理論，或者產生新的理論以將先前的理論納入於一個更大、更普遍的理論之中，如此都將使得數學體系的結構有所變化，產生質的改變。

上述分析顯示，易誤論與絕對論的數學哲學觀是截然不同的，也顯示出現代數學哲學的發展已產生了重大的變革。茲將兩者觀點之差異分析摘要於表一，以提供簡明、清晰的比較。

表一　絕對論與易誤論的數學哲學觀點之比較

派別／主題	絕　對　論	易　誤　論
眞理性	絕對的	可誤的
客觀性	絕對的	社會性的
証明	可靠的，是獲得眞理的途徑	不可靠的，具社會性的功能
知識基礎	具有一可靠的知識基礎	不具有可靠的知識基礎
發展觀	量的累積，靜態的歷程	量的增加與質的變化，動態的歷程
邏輯觀	歐幾里德式的演繹邏輯	假設－演繹的否証邏輯
關注焦點	數學知識的合理化過程	數學知識的創造歷程
經驗與實踐	脫離經驗與實踐	重視經驗與實踐
人與社會	與人及社會因素無關	重視人及社會因素
價值	免於價值的	負載價值的
數學史	忽略數學史	重視數學史

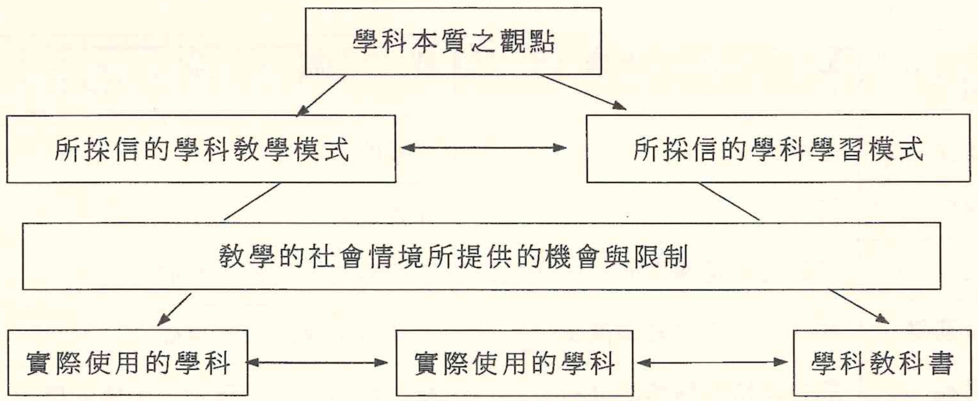
參、數學哲學對數學教育的影響

數學哲學對數學教育的影響是廣泛的，本文以教師層面、學生層面、學校及社會層面等三部份來探討主要的影響關係。

一、教師層面

數學哲學的探討對教師的教學有重要的意義：就消極層面而言，雖然可能有許多的教師都未認眞考慮或無法釐清自己的數學哲學觀，但數學教學皆是以數學哲學爲基礎；就積極層面而言，能明確地表述學科（而非內隱地了解學科）乃是教師專業的特質之一(Kennedy ， 1990)，而且「對一個數學教師來說，如果連『什麼是數學』的問題都沒有搞清楚，豈非在『自欺欺人』？」（鄭毓信，民 84 ，頁 86 ）。

Ernest （ 1991 ）曾詳細指出數學哲學對數學教育的相互影響關係，他認爲教師的數學本質信念是其數學教學觀與學習觀的基礎，亦即教師的數學本質信念將影響教師所採信的數學教學與學習模式，而在學校情境所提供的機會與限制之下，實際形成用於數學教育的學習模式、教學模式，與教科書的使用（如圖二）。



圖二　信念及其與實務間的關係（引自 Ernest, 1991, P. 290 ）

在實徵研究的發現上， Lerman(1990) 讓兩位持絕對論觀點與兩位持易誤論觀點之教師批判同一份錄影帶的數學教學，研究結果發現持絕對論者的兩位教師將焦點放在教師的教學方法是否足夠詳細以能讓學生獲得正確答案，並認爲該錄影帶的教學過於開放，而應給學生更多指導性的引導；而持易誤論的兩位教師則將焦點放在學生是否能獲得所要教學的概念之意義上，並認爲該錄影帶的教學過於封閉而不夠開放，而且提供了過多的指導性引導，研究結果顯示數學哲學觀對數學教學的實際影響。 Thompson(1984) 也發現教師的數學本質信念與其教學行爲有重要的相關，傾

向於絕對論的教師 Jeanne 在教學時主張維持規則、尊重、謙恭的教室氣氛，重視以教師爲主導的教學歷程，強調理解數學背後的邏輯關係；而傾向於易誤論的教師 Kay 則主張開放式與非正式的教室氣氛，重視以學生爲主中心的教學歷程，強調學生的直覺與經驗，認爲最好的教學方法是讓學生參與創造數學知識的歷程，並使用啓發式（ heuristic ）教學方法。茲將兩位教師的數學教學觀整理如表二，以提供詳細與簡明的對照。另外，金鈐（民 80 ）以問卷及訪談調查七位英國職前教師的數學教學觀時，也發現教師的數學本質信念、教學觀、學習觀具有一致性的傾向。

表二　Jeanne 與 Kay 的數學教學觀

Jeanne（絕對論）	Kay（易誤論）
＊教師必須建立並保持一種規則、尊重、謙恭的教室氣氛。 ＊教師的角色是以明確、邏輯與精確的方法呈現數學內容。爲完成此點，教師必須強調數學規則與程序底蘊的原因與邏輯，並強調概念間的邏輯關係（以建立它們的數學意義）。 ＊教師的責任是指導與控制所有的教學活動，包括教室裡的言談。爲達此目的，教師必須具有明確的節課(lesson)發展計畫。 ＊教師有特定的任務需要完成（亦即呈現節課計畫），並需要了解該任務不能被離題地完成（或無效率的改變）。 ＊學生的角色是吸收(assimilate)該內容。"吸收"意指學生"看"到新主題與教師所解釋的內容之間的關係。 ＊學生最好的學習方式是參與教師的解釋活動並回答教師的問題。 ＊學生不應只是以知道如何進行數學計算程序爲滿足，他們應該尋求理解這些程序背後的邏輯。	＊教師必須建立並保持一開放式與非正式的教室氣氛，以確保學生能自由地發問並表達意見。 ＊教師必須能接納學生的建議與想法，並應該利用它們。 ＊教師應該鼓勵學生猜測與臆測，並應該允許他們自己去推理，而非由教師演示解答的方法。教師應該成爲支持者的角色。 ＊教師應該訴諸於學生的直覺與經驗，以使呈現的教材變得有意義。 ＊教師應該愼選正例與非例以仔細檢查學生潛在的錯誤概念。

二、學生層面

教師的數學哲學觀不僅會影響學校數學課程、教學之發展，同時也會表現在數學概念的表徵上，並影響了教室環境的組織與氣氛，形成獨特的「數學教室文化」(Nickson ， 1992)，進而以顯著或潛在的方式影響學生的數學學習與數學哲學觀。

學生將透過他們在學校裡的所見、所聞、所練習與所體會的經驗，而建構他們的數學知識與數學哲學觀。

在實徵研究的發現上，Ford(1994) 在研究來自不同學校的 10 名五年級教師與 20 名學生時，發現學生的數學信念與教師的信念是一致的。而 Lampert(1990) 探討學生的數學信念時指出，在強調數學知識具有確定性的絕對論典範之下的學校經驗，使學生們認爲「做」(doing) 數學就是指遵循老師所教授的規則，「瞭解」(knowing) 數學就是指當老師詢問某一問題時能記住與應用正確的規則，而數學的「眞理」乃依老師對答案認可與否而決定，研究結果顯示出學生的絕對論之數學哲學觀（詳見於表三）。

表三 學生的典型數學本質信念（引自 Shoenfeld，1992，頁 359）

* 數學問題具有一個（而且是唯一的）正確的答案。
* 任何問題只具有一種正確的解題方法——通常該方法是老師最近在課堂上所教授的。
* 一般的學生並不期望於理解數學，他們只期望能記住並應用透過機械式與未理解而學得的東西。
* 數學是一個人的單獨性活動，是個體在隔離之中所從事的活動。
* 已理解數學的學生能夠在五分鐘左右解決任何被指派的問題。
* 在學校所學得的數學很少（或沒有）能應用於眞實世界。
* 形式的証明與發現或發明的歷程無關。

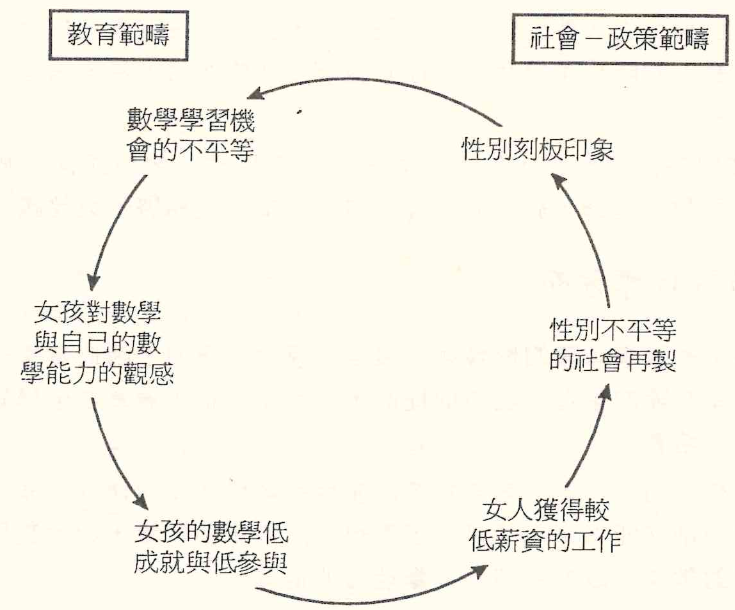
三、學校及社會層面

絕對論者認爲數學具有絕對的客觀性，是一中立、免於價值的學科，所有關乎價值的個人偏好、抉擇、社會涵義等都與數學無關，因此在教育上肯定數學的普遍性，並不存在文化與性別差異等問題。然而，易誤論者反對此種觀點：一方面，他們批判性地認爲絕對論本身就隱含著許多的價值，例如抽象的價值優於具體、理性優於情感、形式優於非形式、客觀優於主觀、普遍優於個殊、理論優於實踐、勞心優於勞力等等，而這些價值乃是爲西方白種男人與中產社會階級而服務的，是鞏固西方白種男人與中產社會階級享有優勢地位的意識形態，它使得數學知識具有「門檻」(gateway) 或「關鍵篩選器」(critical filter) 的社會功能，以保障某一族群的學生將來能獲得較高薪的職業 (Burton, 1994；Dunne、Johnston, 1994；Ernest, 1991)；另一方面，易誤論者則積極主張數學乃是人類在社會互動中所創造出來而負載價值的文化產物，因此在數學教育上極力追求教育機會的均等，反對以西方白種男人與中產社會階級爲中心的數學知識、課程內容、教學模式、評鑑方式與分流制度，強調一種反種族主義、反性別歧視、反文化疏離的多元文化教育。

近年來新興並逐漸受到重視的「民族數學」[2] (ethnomathematics) 便是一種重視

多元文化教育的研究典範（該典範與易誤論有共同的假定），該研究典範指出許多土著民族擁有其獨特的計算、測量、分類與推論的方法，並指出許多在學校環境內表現出低成就的兒童與成人，卻能在校外的環境中表現出良好的「數學」能力——他們能使用從他們的文化情境中所學得的計算、測量、解題、推論方法來應付他們的環境 (D'Ambrosio，1994)。而 Bishop 與 Pompeu（1991，引自黃敏晃譯，民 80）則進行民族數學導向課程與傳統導向課程（基於絕對論的觀點）之比較的實驗研究結果顯示，實施民族數學導向課程能改變傳統數學教學的被動、記憶與重複等狀況，並有助於改變教師的數學教育觀，以及學生的學習態度及參與教學活動的情形。

在女性的數學教育方面，由於傳統以男性爲中心的數學知識與教育，造成女性教育機會的不平等，使得女孩對自己的數學能力產生了負面的態度，並強化他們認爲數學是屬於男性的學科的想法，結果導致女孩在數學測驗上的低成就，以及對數學活動的低參與率，更由於「關鍵篩選器」的作用，使得大部份的女性只能獲得較低薪資的工作與較低的社會地位，進一步強化了性別的刻板印象，因而再製教育機會的不均等。Ernest(1991) 曾以圖三來描繪此一教育機會不均等的形成歷程。



圖三 數學教育中性別不平等的再製循環（引自 Ernest，1991，頁 276）

註 2：就語言學的分析，ethnomathematics 一詞中的 ethno 代表「文化」或「文化的」字源；mathema 在希臘字源中表示解釋、理解、學習、處理實體之意；tics 則是 techn'e 的變體，代表藝術、技術或方式。整個 ethnomathematics 的字義乃指在不同文化與環境脈絡中用以解釋與處理實體的方式（D'Ambrosio，1994）。

上述分析顯示，數學哲學對數學教育有重大的影響，不同的數學哲學典範將產生不同的數學教育面貌。在絕對論的典範下，數學被視爲確定不變的眞理，教師將成爲教學活動的主角，其任務便是向學生傳遞這些數學眞理（亦即數學知識與方法），學生學到的則是與生活經驗無關的數學規則與邏輯概念，將對所學習到的數學感到疏離，也因而建構不適當的數學觀與數學態度，同時少數民族與女性也將繼續地被宰制而接受不平等的數學教育；相反的，在易誤論的典範下，數學不再被視爲絕對的眞理，教學的重點將轉移到數學知識的創造歷程上，學生將成爲教學活動的主角，教學的內容與步驟將配合學生的生活經驗，學生將在猜測、錯誤、更正與再更正的循環中培養出創造數學知識的能力，所學習到的數學將成爲學生生活中的一部份，進而建構適當的數學觀與數學態度，同時也能顧及少數民族及女性的教育機會均等。易誤論乃是一種較適當的數學哲學觀與數學教育思潮。

肆、結論與啓示

數學哲學是數學教育的基礎，近代所興起的數學哲學之哥白尼式革命，已將原本被視爲絕對客觀無誤與靜態的數學知識本質，推向易誤與動態變化的層面，數學知識的確定性已經喪失。然而，在此喪失之中，我們並沒有看到知識的死亡，而是看到知識的成長，同時也帶給我們一種知識有限性的領悟，易誤論也將提供數學教育更嶄新的觀點。

綜合本文的探討與分析，以下針對數學教育目標、數學課程、數學教學與學習、師資培育與教師進修、教育研究等五方面，提出數點啓示與建議：

一、數學教育目標方面

㈠數學哲學觀點對數學知識的影響與發展是深遠而重要的，因此數學教育的目標不僅要包括數學知識的學習和能力的提高，而且也要納入適當之數學觀點、信念、態度的形成與培養。

㈡近代數學哲學已明白指出，數學知識的產生與數學理論的建立並非絕然的邏輯與客觀，數學的創造能力更可能是發展數學知識的重要關鍵，因此數學教育的目標應包括主體對數學知識的創造與判斷能力的提昇。

㈢數學的發展並非獨立於其它領域或學門之外，應強調數學與生活經驗、社會文化相結合的關係，了解數學之實踐性本質，並培養能解決生活及社會問題而具有數學素養的公民。

二、數學課程方面

㈠基於民族數學的理念，數學課程的發展與編排應以地區文化爲起點，考慮地域、文化、性別的差異，選取能與兒童日常生活經驗連結的教材，編製以問題解決爲導向的課程。

㈡數學課程應包含不同典範的數學知識、方法與觀點，以及這些不同典範之間的論爭與衝突，以去除傳統數學教育課程對數學及其形相的不適切描述。

㈢傳統的數學課程只強調數學知識的獲得與驗証歷程，對於如何發現這些知識的過程，則如同絕對論者的主張一樣，被視爲不是重要的問題。然而，一個合理的數學課程實應包含數學知識的創造與形成歷程，而不只是描述什麼是正確的數學知識。

三、數學教學與學習方面

㈠數學知識並非絕對的眞理，教師在教學時應避免單一規則與單一結果的觀點，而應允許並鼓勵學生能以不同的方式、不同的答案來詮釋數學問題，同時重視學生在數學態度的培養，及道德、倫理、情意和美學上的領會。

㈡數學並非單一個人的獨角式遊戲，而是需要他人的參與及協商，因此在數學的教學與學習的歷程中，應加強師生之間與學生之間的對話與討論，而不只是讓全班每個學生都靜靜地坐在座位上操弄紙筆。

四、在師資培育與教師進修方面

㈠教師的數學哲學觀是影響數學教育成敗的重要因素，因此應加強職前數學教師對數學哲學與數學史等方面的認識，並讓職前教師建立適當的數學信念，以在成爲人師之際能適當地傳達數學知識的本質，進行適當的數學教學。

㈡數學哲學與數學教育仍是不斷繼續發展的領域，提供在職教師對相關知識的持續進修乃是促進教師教學專業成長的重要關鍵。

五、在教育研究方面

㈠數學哲學的探討與研究：數學哲學是數學教育的基礎，然而目前國內學者對數學哲學的探討實在有限，大多數的數學教育論文僅將焦點放在心理學層次，實難以對數學教育有整全的理解，因此促進國內學術界對數學哲學的探討與研究，以彌補此一「遺漏了的派典」實有其必要。

㈡數學教室文化的研究：由於數學是負載價值的人類心智之產物，師生在數學教室的互動中會形成獨特的數學教室文化，在此文化之中，教師傳達了數學知識與本

質，並對學生的學習產生實質的影響，因此探討此一文化的形成與發展歷程將有助於對數學教育現象的理解。

㈢民族數學的研究：在重視多元文化的後現代社會中，數學將如同文學與藝術一般不再具有絕對客觀的實體，爲了避免文化宰制的現象並顧及少數民族的教育機會與權利，民族數學的研究實有其重要性。

參考書目

王　前（1991），**數學哲學引論**。遼寧：遼寧教育出版社。

金　鈴（民80），職前教師的數學教學觀。**台北工專學報，第二十四期**，67-137頁。

桂起權（1991），**當代數學哲學與邏輯哲學入門**。上海：華東師範大學出版社。

張景中（民85），**數學與哲學**。台北市：九章出版社。

康宏逵 譯（I. Lakatos 原著）（1987），**証明與反駁**。上海：譯文出版社。

舒煒光、邱仁宗 主編（民79），**當代西方科學哲學述評**。台北：水牛。

黃敏晃 譯（A. J. Bishop 原著）（民80），文化與數學課程。**科學教育月刊，第144期**，3-19。

鄭毓信（民84），數學教師應當關注的幾個問題——兼論「數學教育哲學」的研究。**數學傳播，第十九卷二期**，86-93頁。

鄭毓信（1995），數學哲學中的革命。**哲學與文化，第廿二卷八期**，714-722頁。

Burton, L. (1994). Whose culture includes mathematics?. In S. Lerman(Ed.), ***Culture perspectives on the mathematics classroom*** (pp.69-83). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

D'Ambrosio, U. (1994). Ethno-mathematics, the nature of mathematics and mathematics education. In P. Ernest(Ed.), ***Mathematics, education, and philosophy: An international perspective*** (pp. 230-242). London: The Falmer Press.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. In D. A. Grouws (Ed.), ***Handbook of research on mathematics teaching and learning*** (pp. 39-48). New York: Macmillan.

Dunne, M. &, Johnston, J. (1994). Research in gender and mathematics education: The production of difference. In P. Ernest(Ed.), ***Mathematics, education, and philosophy: An international perspective*** (pp. 221-229). London: The Falmer Press.

Ernest, P.(1991). ***The philosophy of mathematics education***. London: The Falmer Press.

Ernest, P.(1994a). Introduction. In P. Ernest(Ed.), ***Mathematics, education, and philosophy: An international perspective*** (pp. 1-8). London: The Falmer Press.

Ernest, P.(1994b).The dialogical nature of mathematics. In P. Ernest(Ed.), ***Mathematics, education, and philosophy: An international perspective*** (pp. 33-48). London: The Falmer Press.

Ford, M. I. (1994). Teachers' beliefs about mathematical problem solving in the elementary school. ***School science and mathematics, 94***(6), 314-322.

Hersh, R. (1994). Fresh breezes in the philosophy of mathematics. In P. Ernest(Ed.), ***Mathematics, education, and philosophy: An international perspective*** (pp. 1-8). London: The Falmer Press.

Kennedy, M. M. (1990). ***Trends and issues in teacher's subject matter knowledge***. (Eric Document Reproduction Service, No. ED 322 100)

Kight, H. W. (1991). ***Preservice elementary and middle grades teachers' beliefs about mathematics***. Unpublished doctoral dissertation, Georgia state University .

Lakatos, I. (1978). ***Mathematics, science and epistemology***. New York: Cambridge University Press.

Lerman, S. (1990). Alternative perspectives of the nature of mathematics and their influence on the teaching of mathematics. ***British educational research journal, 16***(1), 53-61.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. ***American educational research journal, 27***(1), 29-63.

Nickson, M. (1992). The culture of the mathematics classroom: An unknown quantity? In D. A. Grouws(Ed.), ***Handbook of research on mathematics teaching and learning*** (pp. 101-114). New York: Macmillan.

Shoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws(Ed.), ***Handbook of research on mathematics teaching and learning*** (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Simon, M. (1993). ***Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspectives***. (ERIC Document Reproduction Service, No. ED 364 406)

Thom, R. (1972). Modern mathematics: Does it really exist? In A. G. Howson(Ed.). ***Developments in mathematical education***(pp. 194-120). Cambridge, U. K.:Cambridge University Press.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. ***Educational studies in mathematics,15***, 105-127.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws(Ed.), ***Handbook of research on mathematics teaching and learning*** (pp. 127-146). New York: Macmillan.

黃永和，現職台中縣豐原市南陽國小教師