

## 寫作活動對國小學生數學解題能力的影響

周立勳·劉祥通

本研究主要的目的在探討寫作活動融入國小數學解題教學，對學生解題能力表現的效果，進而分析不同的寫作方式、先前的語文與數學能力透過寫作表現對解題能力的交互影響。本研究以123位國小六年級兒童為對象，實施數學寫作活動教學與學習日誌寫作，而另以82位兒童作為控制組，實施一般「講解—練習」的數學教學。經一學期的實地教學實驗，比較兩組學童解題前後測表現、評量實驗組學童寫作表現，以分別考驗三項研究假設。結果顯示，實施數學寫作活動班級的國小學生在數學解題能力的表現上顯著優於未實施數學寫作班級的學生；數學寫作對增進國小學童瞭解問題、擬定計畫與執行計畫等解題歷程的表現上有顯著積極的效果；以及不同寫作教學型式、先前的數學成就可透過寫作品質的表現影響解題能力，而先前的語文成就則是透過寫作次數影響寫作品質，再進而影響解題能力。

關鍵字：數學寫作活動、解題能力、解題教學

Keyword：math writing activities、problem solving ability、problem solving instruction

### 壹、緒論

我國小學數學教育早於舊課程目標（民65）中，明示應培養學生解題能力，但實施多年來，僅嘗試性地於六年級上學期的三個單元「怎樣解題(一)、(二)、(三)」，教導學生解題思考。因而無論就課程教材抑或教學仍普遍沿襲傳統，以習得數學知識為最後目標，卻不講求知識獲得的過程。長期下來，我們的學生在計算方面極為熟練，卻感到乏味；在解題方面，記得了各種類型文字題的解法公式，卻無法推理思考（周筱亭，民84）。現有的解題教材也往往成為學生學習數學最感困難的單元之一（任晟蓀，民75）。

針對過去國小數學課程的缺失，新課程（民85）採用建構論的觀點，強調解決非例行性問題（non-routine problem），養成學生主動思考問題的習慣。此一改革的動向包含讓兒童建構數學的意義，反省自己的解題過程，自行建構解題活動等。在「由兒童自行建構解題活動，以進行有意義的學習」的教學蘊涵上，教師應扮演「佈題者」的角色，使兒童成為真正的解題者（甯自強，民82）。新課程留給兒童多元化的解題空間，學童在教師提出關鍵性問題之後，要提出自己的解題方法，

允許其有「路徑差」，不強迫要求用同一格式解題（劉好、許天維，民84）。有鑑於數學解題教學的重要性，如何協助教師於實際的班級教學情境中，無論是新或舊課程的架構，進行較為理想而有效的解題教學，以提昇學生解題能力，為當今國小數學教育的重要課題。

所謂「解題」（problem solving），依據美國數學督導委員會（The National Council of Supervisors of Mathematics）的闡釋，「解題是一種利用已學過的知識去處理新的或未知情境的歷程」（NCTM, 1989）。就數學教學而言，數學解題不同於數學計算，主要在於解題本身涉及高層次的思考技能，而非僅是單純的回答知識的層次而已。解題是一複雜的結構，學生在尋找答案的過程需要表徵知識、轉譯問題、監控知識與選擇程序（Barta, 1991）。解題教學即在提供一種「情境」以溝通數學觀念，一種「脈絡」以探究關係，以及一種「媒介」以銜接數學概念。因此要使學生透過教學活動成功地獲得解題能力，其中一個重要關鍵即在於，教學者能否適切提供解題的情境、脈絡及媒介，以引發學生主動的思考與溝通知識。

在許多解題的教學策略中，值得注意者，「寫作活動」（writing activities）是被許多學者認為有助於學生連絡各種不同數學概念的表徵，例如：物體的、圖像的、符號的、文字的與心理的表徵（Azzolion, 1990; McGhee, 1991; Miller, 1991; Wadling et al., 1992）。據此，研究者認為寫作在幫助學生學習數學上，將可扮演重要的角色，尤其連結學生的直覺想法、數學語言與抽象符號。事實上，美國數學教師協會推薦將數學寫作活動融入數學教學中，且認為數學應強調有意義的溝通、數學觀念的寫作正可幫助學生釐清想法與加深既有的觀念。相對的，國內這方面無論在學校的數學教學，甚或在研究上則較少受到應有的關注。

寫作活動可佈置一種有助於引發學生「行動」與「省思」的「問題解決」情境，且藉由此種活動將使學習數學解題的歷程變得更有意義。但有關數學寫作在解題教學的效用如何？實證研究尚不遑多見，值得探究。

### 一、寫作融入解題教學的途徑

寫作有助於學生較深入的瞭解問題，因此較早NCTM認為，在解題教學中教師隨時要求學生寫出問題，有助於學生在解題歷程中獲得洞察（NCTM, 1980）。後來，NCTM(1989)更建議數學課程應於班級教學中整合寫作活動，因為寫作能造成有意義的學習。Silverman等人(1992)認為寫作、解題、以及分享彼此的問題能改善解題的技巧。Irons與Irons(1989)建議，當學生創造他們自己獨特的知識，他們將逐漸地建立有助於解題情境的概念與想法的圖像。再者，教師應在班級之前改變問題並解決不同的觀點，如此才能增進學生瞭解問題（O'Daffer, 1986）。Price(1989)建議學生須寫出他們數學的想法以釐清他們的思考。



研究者更進而有系統地嘗試 (Fennell & Ammon, 1985)，提出包含「預寫」(prewriting)、「寫作」(writing)、「重寫與修改」(rewriting and revising)、以及「發表」(publication)等四步驟的寫作歷程，應用在數學班級教學中，讓學生成為善於思考者。後來，Ford (1990)將「討論」(conferencing)加進於「寫作」之後，而成為五個步驟的寫作歷程。

學習日誌(journal)寫作在數學班級教學上是新近研究的論題。Vacca與Vacca (1986)認為使用寫作於教導數學上，最有效的方法是透過寫學習日誌。Stix (1994)發現以多重模式法(multimodal approach)教數學、寫學習日誌，可降低數學焦慮。兩者之研究皆意含寫學習日誌應被納入數學班級教學中。

事實上有許多的方式可將寫作專門用來幫助數學的學習(Connolly, 1989)。上課開始的「自由寫作」(freewriting)有助於學生集中注意於數學的主題。「焦點自由寫作」(focused freewriting)鼓勵探索問題。要求學生寫出學習歷程的事項或處理問題的方式，有助於學生不依賴教師與教科書而學習獨立的思考。在考試上「解釋錯誤」有助於學生瞭解並重新思考他們迷思的概念。教師也可用寫作活動調查學生的學習態度。至於其他運用於數學班級教學的寫作方式有「問問題」、「作總結」、「下定義」、「創作文字題」等。

Rose(1989)提出一些數學教學上的實際應用。要求學生寫出他們所不瞭解的問題的重點，寫出概念或程序的解釋讓學生練習清晰溝通的技巧，並可作為教師評量的設計。以自己的文字寫出越多有關概念的思考，有助於學生對概念有越佳的記憶。學期報告與正式的報告在數學班級教學中，支持了數學不單是數字操作的論調。編寫文字題需要對問題的數學觀念有較佳的瞭解，同時強調數學確切的涵義，使學生將自己的經驗融入問題敘述中。

再者，McIntosh(1991)具體地舉出四種應用於數學班級教學技巧的寫作：「札記」(logs)、「日誌」(journals)、「闡述性寫作」(expository writing)、以及「創造性寫作」(creative writing)。「札記」提供學生針對正在學習的特定主題有反思的機會；「日誌」類似「札記」，但日誌寫作的方法比起札記為較非正式的寫作練習；「闡述性的寫作」有別於日誌與札記在於它不是讓學生反思學習經驗的時機，而是一個讓學生清楚地解釋他們對數學概念與程序瞭解的時機；「創造性寫作」有機會讓學生以數學的概念組成自己的問題與故事。McIntosh認為創造性寫作有助於對語文及文學課程有偏好的學生，能對數學產生更積極的感受。

Burks(1993)融合了Mason等人(1991)解題的觀念與Polya的解題歷程，提出一個執行歷程的寫作活動。寫作活動採用「標題寫作」(rubric writing)的方式，要求學生依照解題歷程每個階段所列的關鍵問題綱要，寫出個人的想法與做法。標題寫作的目的在幫助學生有系統地逼近未解的問題。

根據上述學者的建議，數學寫作活動因教學目的、需要與時機的不同，在實際的設計與應用上相當多樣化，除包含一般性的寫作，諸如：數學札記、學習日誌、自由寫作以及記錄解題外，尚有應用於特定主題的寫作，如擬題、編寫數學故事、焦點寫作以及配合解題歷程的標題寫作等。將寫作活動融入數學解題教學的基本前提是，希望將過去數學教學強調「多做」題目，轉變為「多省思」數學問題。

## 二、實證研究

Bell與Bell(1985)曾對兩個國三的數學班級，共38名學生(實驗組18位、控制組20位)，進行一項為期四週的試探性的實驗研究。寫作被「視為一項整合教學歷程的要素，而非只是補充的練習活動」。基本上，研究者對實驗組實施「闡述性的寫作」，學生在解給定的問題時，寫出他們所依照的程序，若無法解題，則表述他們遭遇困惑與挫折之處。研究結果指出，寫作組於四週的實驗結束，解題的表現顯著地優於控制組。不過由於實驗時間短且樣本少，所以減弱了研究的效度。

Berlinghoff(1989)研究如何以寫作鼓勵非科學主修的大一學生，發展「原創性的數學」(original mathematics)。研究者先向學生介紹十二種解題策略，之後在學生寫作的作業上要求「描述他們自己如何以這些解題策略處理特殊的問題」。縱使學生無法完成此項作業，但也要描述自己嘗試過的計畫。研究者覺得一般的學生都會更留意於使用解題策略，而且比起他們未進行解題歷程寫作前能完成更多的問題。

Burks(1993)探討寫作做為教導學生使用執行歷程(executive processes)與捷思策略於解題教學的效果。研究以371名國二學生為對象，採用實驗組(11個班級)與對照組(5個班級)前後測設計，進行14週的教學實驗。實驗分兩階段，首先於學期開始前測之後，實施為期九週的寫作，配合執行歷程與捷思策略教學(如前節所述)；第二階段於第一次後測，接著有五週的無解題教學，但讓學生每天解一題日常生活有關數學內容的問題後，再做第二次後測。結果顯示，強調學生使用執行歷程與解題策略解題的實驗解題單元，寫作能有效地增進實驗組學生解題的技巧，且中、低解題能力者進步較大於高解題能力者；多數學生都能使用「進入」、「計畫」、「攻堅」等執行歷程與五種捷思策略；雖然在學生已能將執行歷程與捷思策略融入自己的解題方法時，寫作活動則似乎不再有用，但多數學生仍能持續一學期的歷程與策略的寫作；最後，研究並未發現有關執行歷程與策略的寫作活動比傳統的教學，更能促進學生對數學解題的積極態度。

最近，Van Horn(1994)在數學班級教學中，探討使用寫作歷程結合捷思教學與單獨使用捷思教學相較，是否有助增進學生解題能力之想法。研究以42名國小五年級兒童為對象，隨機分派實驗組與控制組各21名。以十種包含畫圖、列表、找



寫作活動對國小學生數學解題能力的影響

類型……等解題策略的數學解題單元作為實驗教材，學生需要依瞭解問題、寫出策略、計算、與寫出解答等四個步驟解題。控制組學生採異質小組的分組教學，每三天教一種策略，每天約75分鐘，實驗時間共八週。實驗組除了與控制組的教材內容與教學方式相同外，增加寫作歷程於創造自己的問題活動，學生在學過特定的捷思策略之後，教師出一些複習題，讓學生先個別的依題目寫下解題初稿，在小組中相互討論後，再修改成定稿。印出編寫完成的題目，讓學生解說自己的問題，最後集結成學生自己的解題冊。實驗結果顯示，實驗組與控制組前測解題能力無顯著差異，但實驗組後測解題能力則顯著高於控制組。研究者認為運用寫作歷程讓學生寫出自己的問題可以使學生成為較佳的解題者。

另外，Wade(1994)實驗以建構式教學為基礎(constructivist-based)的數學解題教學計畫，強調將閱讀與寫作策略使用於同儕合作解題的社會情境中，考驗學生在學習成就、數學解題的態度以及解文字題的自信心之效果。研究者對17位國小五年級學生實施六週、每天三個半小時的建構式數學解題教學。從前後測考驗結果顯示，受試在解題能力成就測驗後測的表現顯著地優於前測，在研究者自編的解題測驗表現上，後測分數亦顯著高於前測。尤其，低成就學生在自編解題測驗前後測的表現，獲益的程度顯著地大於高成就學生。除此，在態度量尺方面，並未反映出前後測有顯著的差異。

### 三、研究問題

寫作在數學的學習上具有符應解題歷程、有助於聯絡不同表徵與建構數學知識、以及促進後設認知能力的發展之功能，而寫作活動配合數學教材融入數學教學亦具可行性。據此，寫作活動整合數學教學是否有助於增進學生解題能力的表現？是本研究擬將探討的主要問題。

其次，過去國小數學課程(民83改編本)偏重數學概念與技能的學習，數學解題教學並未受到應有的重視，僅嘗試性地在六年級上學期編排三個怎樣解題單元，分別教導學生學習如何設定未知數(第二單元)、簡化問題(第五單元)以及尋找規律(第九單元)三種解題策略，教學指引並建議教師採用Polya解題歷程的四個階段指導學生解決文字題，以培養學生解決一般問題的能力。因此，配合現有的數學教學單元，長期而言，寫作活動對學生解題歷程的表現是否有助益？

尤其，從過去少數的研究發現，寫作活動對增進學生解題能力有積極的效果，然而此種效果與學生寫作的表現、合作與個別寫作的教學型式、先前的語文及數學成就之關係如何？教學型式、先前的語文與數學成就表現透過寫作表現影響解題能力的效果如何？均是本研究擬待釐清的問題。

## 貳、研究方法

### 一、研究設計與實驗變項

本研究為實地實驗研究，為使實驗教學的進行能符合國民小學學校實際班級教學條件，未將實驗對象做隨機分派處理，而採用準實驗不等組前後測設計。各組以班級為單位，分派實驗組——「寫作活動」(三個班級)與控制組——「無寫作活動」(二個班級)。

實驗變項主要係指在實驗班級中實施「個別」與「合作」兩種型式的寫作活動之數學解題教學與無寫作活動的一般數學教學。本研究中視「寫作活動」為一種數學教學與學習的溝通工具(劉祥通、周立勳，民86)。研究者認為凡是能促使學習者解釋、省思、回顧、組織或連結數學的書寫與記錄活動，均可謂之「數學寫作活動」。

為達成寫作做為數學教學與學習溝通的功能，實驗由研究者與實驗教學者根據教學單元及參考文獻探討中有關的數學寫作活動，共同設計的「發現問題」、「尋找條件」、「擬題與編寫數學故事」、與「評估解題結果」四項寫作活動。在班級教學中，將學生分成4-6人的能力異質性小組，鼓勵學生透過小組成員共同討論作業、研究解決問題，以個別或合作的方式完成寫作活動。實驗組班級中各有一班固定採行個別或合作寫作的教學型式，另一班則不限定寫作的教學型式。另外，實驗期間對實驗組所有學生實施「數學學習日誌」之寫作。二班控制組的數學教學除無寫作活動外，均維持傳統「教師演示」、「學生個別練習」、「師生共同訂正」的教學流程。

### 二、實驗時間與對象

實驗時間配合國小行事曆，為八十五學年第一學期，自八十五年九月起至八十六年元月止，計五個月。依現行國小六年級數學科的課程，學生每週上六節課，受試接受實驗為十七週。

受試為嘉義縣、市二所國民小學六年級五個班級共205名學童，其中男童107名，女童98名。參與實驗的學校，一所位於嘉義市區，為國立嘉義師院附設實驗小學(三個班級)；另一所為嘉義縣內的國小(二個班級)。實驗組(寫作融入教學)有三班，二班在嘉師實小、一在嘉義縣屬國小，計123名學童；控制組(演示—練習教學)則二所參與實驗學校各一班，計82名。



### 三、研究工具

#### (一) 國民小學數學成就測驗

本測驗全名「國民小學數學能力發展測驗」，為周台傑、范金玉（民82）根據現行國小數學課程標準（民64），及各年級教學指引（民68-74）所編製的數學成就測驗。測驗有低、中、高三級，分別適用於國小各年級，以鑑定特殊兒童、評估兒童數學能力、發展教學方案。本研究前測採用高級測驗中五年級的測驗題，測量研究樣本之先前數學成就，另採六年級的有關「應用問題」分測驗的題目作為實驗後測，以評量實驗後研究樣本之學習數學解題的成就表現。

#### (二) 數學解題能力測驗

由於本研究以現行六年級上學期數學科十個教學單元（84年）為教材，其中包含「怎樣解題(一)、(二)、(三)」三個單元，為瞭解學生在有無寫作活動或不同寫作（個別、合作）教學型式下解題學習表現的差異，乃採用劉秋木（民78）所編製之「數學解題行為評量表」甲、乙兩式分別作為評量教學前、後解題能力的表現。

### 四、資料處理

無論前、後測皆由研究者親自施測，受試前測時間於學期開始後一週內實施，並商請參與實驗教學者填列學生各項基本資料；後測時間則於期末考後一周內完成。

資料分析主要以「單因子多變量共變數分析」考驗實驗處理對學生解題能力與解題歷程表現的效果；以「多元迴歸分析」考驗先前學習成就（數學、語文）、寫作教學型式（個別、合作），透過寫作表現影響解題能力的效果。

## 參、研究結果

### 一、數學寫作活動對解題能力的教學效果

為考驗國小數學科實施寫作活動在學生解題能力表現上的教學效果，本研究以學生在後測數學成就測驗有關「數學應用」分測驗的得分，及後測「數學解題行為評量表」之得分為依變項。前項測驗因是與課程教學有關的評量，故代表解例行性問題的表現，而後者之測驗與課程無關，則代表解非例行性問題的能力。

因兩個依變項存在顯著的相關，且為控制實驗組與控制組先前解題能力之差異，因此，以受試解題能力前測之分數為共變數，實驗處理組別為自變項，解應用

問題及解題後測兩項分數為依變項進行單因子多變量共變數分析。表一多變量共變數分析之共變數同質性考驗結果並未達顯著 (Wilks  $\Lambda$  值 = .9979;  $P > .05$ )，拒絕共變數迴歸線不同質的虛無假設。依此，以先前解題能力調整兩組在依變項表現的差異，由表二得知，實驗組在解題能力後測與解數學應用題平均數分別為 36.57 與 12.29，調節平均數為 36.01 與 12.04；控制組在解題能力後測與數學應用題平均數分別為 32.23 與 10.69，調節平均數為 32.79 與 10.94。多變量共變數分析結果，表三顯示實驗組與控制組在依變項的差異考驗 Wilks  $\Lambda$  值 (.9402) 達統計上之顯著水準 ( $P < .01$ )。兩組分別在「數學應用」與「解題能力」上之單變量變異數分析 F 值亦皆達顯著 ( $P < .05$ ;  $P < .01$ )。

表一 實驗組與控制組數學應用與解題能力之共變數迴歸同質性考驗

變項	假設 SS	誤差 SS	假設 MS	誤差 MS	F 值	顯著性
數學應用	4.022	2331.365	4.022	12.142	.331	.566 n.s
解題能力	9.847	7730.199	9.847	40.261	.245	.621 n.s
Wilks $\Lambda$ 值 = .9979 自由度(2, 191)					.204	.816 n.s

單變量F考驗之自由度(1, 192)

依據統計考驗結果，實驗組與控制組在數學解題能力兩項指標的表現有顯著差異，實驗組的平均數高於控制組，亦即，在國小數學教學中實施寫作活動的國小兒童在解題能力的表現上顯著地優於未實施寫作活動的學童。

表二 實驗組、控制組受試在解題能力測驗前、後測與數學應用分數之平均數、標準差與調節平均數

組別	n	解題前測	解題後測		數學應用	
		M (SD)	M (SD)	調節平均數	M (SD)	調節平均數
實驗組	118	32.31 (10.03)	36.57 (10.09)	36.01	12.288 (4.526)	12.04
控制組	78	30.86 (9.413)	32.23 (9.54)	32.79	10.692 (4.453)	10.94
全體	169	31.729 (9.786)	34.82 (10.08)		11.653 (4.553)	



寫作活動對國小學生數學解題能力的影響

表三 實驗組與控制組數學應用與解題能力後測之多變量共變數分析結果摘要

變項	假設 SS	誤差 SS	假設 MS	誤差 MS	F 值	顯著性
數學應用 解題能力	57.520 464.145	2335.387 7740.046	57.520 464.145	12.100 40.104	4.753 11.574	.030 * .001 **
Wilks $\Lambda$ 值= .9402 自由度(2, 192)					6.1040	.003 **

單變量F考驗之自由度(1, 193) \* P < .05 \*\* P < .01

## 二、數學寫作活動對解題歷程表現之影響

數學寫作活動對兒童在解題歷程中各階段能力的表現是否有影響？乃根據 Polya 的觀點及「數學解題行為評量表」(劉秋木, 民78)之測驗建構, 將解題能力後測(乙卷)表現區分為「瞭解題意」、「擬訂計畫」、「執行計畫」、「評估答案」四種認知歷程表現分數, 作為依變項。由於四項解題的認知歷程之間以及與前測解題能力(甲卷)之間存在顯著的相關。故以前測解題能力為共變數、四項解題歷程分數作為依變項, 進行單因子多變量共變數分析, 考驗實驗組與控制組在解題認知歷程表現的差異。

表四共變數迴歸同質性考驗結果顯示, 多變量差異考驗(Wilks  $\Lambda$  =.991)未達統計上之顯著水準(P>.05), 拒絕共變數迴歸線不同質的虛無假設。繼續以解題能力前測分數作為共變數調整四項認知歷程的表現, 由表五得知, 實驗組四項解題認知歷程表現的調節平均數分別為13.802、17.943、4.054與.711; 控制組四項解題認知歷程表現的調節平均數分別為12.746、16.155、3.426與.647。多變量共變數分析結果, 表六顯示多變量差異考驗值(Wilks  $\Lambda$  =.9189)達統計上之顯著水準(P<.01), 實驗組與控制組在解題認知歷程的表現上有顯著差異。再者, 單變量變異數分析兩組除在「評估答案」表現的差異(F=1.003)未達顯著外(P>.05), 其餘三項解題認知歷程表現的差異皆達顯著(P<.01)。

表四 實驗組與控制組數學解題歷程表現之共變數迴歸同質性考驗

變項	假設 SS	誤差 SS	假設 MS	誤差 MS	F 值	顯著性
瞭解題意	3.205	1129.772	3.205	5.915	.542	.463 n.s
擬訂計畫	6.843	2948.669	6.843	15.438	.443	.506 n.s
執行計畫	.045	286.067	.045	1.498	.030	.863 n.s
評估答案	.010	36.582	.010	.192	.054	.816 n.s
Wilks $\Lambda$ 值= .991 自由度(4, 188)					.408	.803 n.s

單變量F考驗之自由度(1, 191)

表五 實驗組、控制組受試在解題歷程表現後測分數之平均數、標準差與調節平均數

組別	N	瞭解題意		擬訂計畫		執行計畫		評估答案	
		M	SD	M	SD	M	SD	M	SD
實驗組	116	13.99	3.17	18.28	5.70	4.14	1.56	.72	.45
控制組	79	12.56	3.46	15.82	5.27	3.34	1.58	.63	.48
全體	195	13.41	3.36	17.28	5.65	3.82	1.61	.69	.47

表六 實驗組與控制組數學解題歷程表現後測之多變量共變數分析結果摘要

變項	假設 SS	誤差 SS	假設 MS	誤差 MS	F 值	顯著性
瞭解題意	52.047	1132.977	52.047	5.901	8.820	.003**
擬訂計畫	149.140	2955.513	149.140	15.393	9.689	.002**
執行計畫	18.428	286.112	18.428	1.490	12.367	.001**
評估答案	.191	36.592	.191	.191	1.003	.318 n.s
Wilks $\Lambda$ 值= .9189 自由度(4, 188)					4.180	.003**

單變量F考驗之自由度(1, 192) \*\* P < .01

綜上分析, 實驗組與控制組在數學解題認知歷程四項指標的表現有顯著差異, 實驗組在解題歷程中的瞭解題意、擬訂計畫、執行計畫等方面表現優於控制組。亦即, 國小數學教學中實施寫作活動對國小兒童解題大部份認知歷程表現有顯著積極的效果。

## 三、不同語文與數學成就兒童之數學寫作表現對解題能力之影響

不同語文與數學能力的兒童在「合作」與「個別」數學寫作活動的教學型式, 透過寫作表現, 對數學解題能力究竟有何影響? 本研究假定合作與個別寫作之「教學型式」、先前的「語文」與「數學」學習成就會影響兒童數學寫作的表現, 再進而影響數學解題能力的表現。

為瞭解分別實施「合作」與「個別」寫作的兩個班級學生的寫作表現, 本研究先蒐集就實驗期間兒童個人在寫作活動中所做的有關作業與學習日誌, 進行「數



寫作活動對國小學生數學解題能力的影響

量」與「品質」兩方面的評量。數量的評量係以兒童個人整學期寫作的次數多寡為指標，品質的評量則由研究者參考 Stenmark(1991) 及 NCTM (1989) 所提的指標，從「問題解決的技巧」、「數學銜接的能力」、「溝通數學的能力」、「推理的能力」以及「對數學及自我學習的態度」等五項標準，採五點量表計分予以評量，經本研究兩位研究者分別評定學生寫作作品，評分者之間相關達極顯著水準 ( $r=.69, n=74, P<.001$ )。本研究以兩位評分者評分之平均數表示受試寫作表現品質之高低，得分越高表示其數學寫作的品質越佳，反之得分越低表示其寫作品質越差。

教學型式則將「合作」與「個別」寫作二分變項轉換為虛擬變項 (dummy variables)。依此求得教學型式、先前的「語文」與「數學」的學習成就、寫作次數與品質、以及解題能力表現等變項之間的相關。

由表七得知，教學型式除與寫作品質之間的相關達顯著外 ( $r=.4239, P<.001$ )，餘皆未達顯著 ( $P>.05$ )。而其他各變項之間的相關皆達顯著水準 ( $P<.01$ )，其中先前的數學與語文成就分別與解題能力表現的相關較高 ( $r=.7542, .6027$ )；寫作的品質與數量之間亦有中度的相關 ( $r=.5903$ )，二者在與先前學習表現及解題能力表現上之相關則相近。

接著根據本研究的假定，分別進行三階段的多元迴歸分析，結果摘要如表八。首先，以「解題能力」為效標變項，而以寫作的次數與品質為預測變項，迴歸分析的結果顯示，多元相關係數達顯著 ( $r=.4676, p<.001$ )，其中寫作品質之標準化淨迴歸係數達顯著 ( $\beta = .346, P<.01$ )，寫作的次數未達顯著 ( $\beta = .166, P>.05$ )；其次，以「寫作的品質」為效標變項，而以寫作的次數、教學型式及先前的語文與數學成就為預測變項，迴歸分析的結果顯示，多元相關係數達顯著 ( $r=.7341, p<.001$ )，其中寫作次數、教學型式及先前的數學成就三個變項之標準化淨迴歸係數皆達顯著 ( $P<.001; P<.001; P<.05$ )，先前的語文成就則未達顯著 ( $\beta = .032, P>.05$ )；最後，再以「寫作次數」為效標變項，而以教學型式及先前的語文與數學成就為預測變項，迴歸分析的結果顯示，多元相關係數達顯著 ( $r=.50, p<.001$ )，其中只有先前的語文成就之標準化淨迴歸係數達顯著 ( $\beta = .359413, P<.05$ )，其餘兩個變項皆未達顯著水準 ( $\beta = .166, P>.05$ )。

表七 教學型式、學習成就、寫作表現與解題能力之積差相關 (N=74)

	教學型式	先前學習表現		寫作表現	
		語文成就	數學成就	寫作品質	寫作次數
語文成就	.1132				
數學成就	.1062	.6571 ***			
寫作品質	.4239 ***	.4040 ***	.4165 ***		
寫作次數	.1735	.4336 ***	.3104 ***	.5903 ***	
解題能力	.1155	.6027 ***	.7542 ***	.3962 ***	.2771 **
** P< .01    *** P< .001					

表八 寫作表現影響解題能力之多元迴歸分析結果摘要

效標變項 (預測變項)	標準化迴 歸係數 $\beta$	T值	顯著性	多元相關 係數 (R)	R <sup>2</sup>	顯著性
解題能力 (寫作次數) (寫作品質)	.165829 .346021	1.272 2.653	.2074n.s .0097**	.46761	.21866	.0001 ***
寫作品質 (寫作次數) (教學型式) (語文成就) (數學成就)	.452898 -.313045 .032102 .217824	4.933 -3.830 .285 2.004	.0000*** .0003*** .7766n.s .0488*	.73414	.53895	.0000 ***
寫作次數 (教學型式) (語文成就) (數學成就)	-.149191 .359413 .127526	-1.462 2.633 .932	.1479n.s .0103* .3545n.s	.50062	.25062	.0001 ***
P< .05    ** P< .01    *** P< .001						

綜上分析可知，教學型式係透過寫作品質而影響解題能力表現，值得注意者，教學型式其標準化淨迴歸係數為負值 (-.313)，顯示在控制寫作次數與先前的學習表現之影響後，個別寫作兒童 (編碼為 0) 之寫作品質表現優於合作寫作 (編碼為 1)，申言之，即先前數學能力越佳、寫作次數越多，在個別寫作活動下之兒童，其寫作品質越佳，進而解題能力的表現越高；再者，先前語文成就透過寫作次數影響寫作品質進而影響解題能力，亦即語文能力越高者寫作次數越多，寫作品質越佳，進而解題能力表現也越好。



## 肆、討論與建議

解題是當前數學教育改革的努力焦點，因此探求教導學生解題的有效途徑便十分重要。由於寫作具有多重表徵與統整功能，且能提供現有思考立即回饋、建立連結與組合的方法、有助於發展主動的自我監控歷程等優勢(Emig,1977)，因此本研究主要的目的即在探討寫作活動融入國小數學解題教學，對學生解題能力表現的影響，進而分析不同的寫作方式、先前的語文與數學成就透過寫作表現對解題能力的交互影響。以下分別就研究問題討論所獲得的結果：

首先，當寫作融入一般數學課程教學中，寫作活動是否有助於增進學童數學解題能力？

本研究以解數學成就測驗中的應用問題，以及解題能力測驗表現做為依變項。前者與單元教材有關，故為例行性問題；而後者與學習單元教材無關，故為非例行性問題。在控制先前解題能力之影響後，實驗組與控制組兒童在兩種解題測驗的表現上有顯著差異，實驗組的平均數高於控制組。國小數學教學中實施寫作活動的國小兒童解題能力優於未實施寫作活動的兒童。寫作活動對國小兒童解題例行性與非例行性問題能力的影響有顯著積極的效果。

此結果十分近似 Van Horn(1994) 在數學班級教學中，使用寫作歷程結合捷思教學較單獨使用捷思教學，更能明顯增進學生解題能力之研究結論。研究中，無論實驗組與控制組兒童均在特定的三個單元中（怎樣解題一、二、三），接受解題教學，此三個單元以讓學生熟習設定未知數、簡化問題與尋找規律之解題策略為目標。因此實驗組係將寫作活動融入解題策略教學，而控制組則為單純的解題策略教學，就解題能力前後測的表現觀之，兩組學生解題能力雖皆有進步，不過實驗組進步幅度則遠超過控制組（約3分）。

除此，寫作活動整合其他教材單元，在本研究如：分數乘法與四則運算、幾何圖形、甚至比與比值，亦有助於增進學生學習解特定單元教材之應用題的能力。此正如 Ford(1990) 所言，寫作在數學上能促進更深度的、更有意義的學習，並且能作為一種有效的解題教學策略。

其次，就 Polya 之解題歷程的觀點而言，數學寫作活動是否有助於增進學生解題歷程各階段的表現？

本研究將實驗組與控制組學童在數學解題能力後測，區分成瞭解題意、擬定計畫、執行計畫、以及回顧答案等四項認知歷程的表現指標。在控制先前的解題能力後，實驗組與控制組在解題歷程各階段的表現有顯著差異，實驗組在瞭解題意、擬訂計畫、執行計畫等方面表現優於控制組。寫作活動對國小兒童解題大部份的認知歷程表現有顯著而積極的影響。亦即，實施數學寫作活動明顯地有助於增進學童解

題歷程各階段的表現。

若對照 Burks(1993) 的研究，本研究使用的四種數學寫作活動的設計，找問題、找條件、擬題與找錯誤，主要目的即在增進學生發現問題、瞭解題意、擬定解題計畫以及評估解答的能力，此與 Burks 將寫作整合執行歷程與捷思策略於解題教學中雷同。結果亦皆顯示，寫作確實能有效地增進實驗組學生解題的技巧。

與 Burks 較大不同者，本研究教學活動強調在教師佈題下，學生先於小組中討論，再進行合作或個別寫作，而 Burks 的方法主要採標題寫作配合解題執行歷程，引導學生依問題綱要寫出自己的想法與作法，有系統地讓學生熟習思考解題技巧。其結果雖增進了解題技巧的使用，但卻忽略後設認知能力與情意的發展，故 Burks 的研究並未發現有關執行歷程與策略的寫作活動比傳統的教學，更能促進學生對數學解題的積極態度。

事實上，後設認知的技能對數學解題是很重要的(Peterson, 1988)，在解題教學中，老師應藉著自己控制決定與行動的機會展現給學生觀摩，以幫助學生發展控制與調整的能力(Garofalo, 1986; Schoenfeld, 1987)。藉由數學寫作溝通自己心理內在的計畫、監控、與評估解答的過程，使學生產生省思、分析、或陳述的活動，將有助於後設認知能力的發展(Garofalo, 1987)。本研究即是將寫作視為數學教學的溝通工具，故在解題教學上，寫作活動意使學生成為主動的思考者，增進其自我監控能力的發展。從學生在學習日誌上反映出的一些想法，可印證本研究的寫作活動在促進後設認知能力的發展具有某些程度的效果，以及對學生的數學態度產生積極的影響。

最後，數學寫作形式、先前的語文與數學成就如何透過寫作表現影響解題能力？本研究發現學生寫作次數與品質分別與後測解題能力表現有關，但品質的影響力重於次數，表示寫作品質越佳者其後測解題能力也越佳；寫作教學型式與後測解題能力的表現無直接關聯，卻可能透過寫作品質而間接影響解題能力表現。若控制寫作次數與先前的語文、數學成就之影響後，個別寫作兒童之寫作品質表現優於合作寫作。

先前語文與數學成就與後測解題能力有較高的相關，與寫作表現存在中度相關，若與寫作教學型式合併考慮，則顯示先前數學成就越佳、寫作次數越多，在個別寫作活動下之兒童，其寫作品質越佳，進而解題能力的表現越高；再者，先前語文成就可透過寫作次數影響寫作品質進而影響解題能力，此表示語文能力越高者寫作次數越多，寫作品質越佳，進而解題能力表現也越好。

本項結果對數學寫作與解題教學有二項重要的涵義：首先，兩班教學者對學生數學寫作多採鼓勵而非強制性的方式，因而兒童寫作的次數差異甚大，最多者寫 85 篇，最少者 5 篇，平均為 46 篇。就此以觀，語文能力可能是影響學生數學寫作意願



## 寫作活動對國小學生數學解題能力的影響

的重要因素，語文能力越佳者，可能因表達能力較佳，而有較多的數學寫作表現；再者，學生先前的數學能力越佳，且在個別寫作方式下，有較佳的寫作品質表現。就個別寫作與合作寫作而言，二者皆在教學者佈題後進行口述的討論，但差別在於個別寫作乃學生個人獨自完成寫作，而合作寫作為小組共同完成寫作，故個別寫作提供較多學生經歷第二階表徵思考歷程(Emig, 1977)的機會，合作寫作則可能易陷於團體互動之弊，如由高能力者主導寫作，而減少其他學生個人反省自己思考的機會，長此以往，對數學寫作的品質表現產生不利的影響。因此若欲藉數學寫作增進學生解題能力，在有提供小組同儕討論的情境下，採用個別寫作要優於合作寫作。

研究者認為將寫作融入國小數學教學是可行的，而且對增進學生解題能力也是有效的。本研究採用研究者與教學者合作行動研究的方式，就整學期的數學教材配合解題歷程設計的寫作活動，教學者雖維持個人自我的教學風格，但大都能透過課堂討論、溝通，鼓勵學生主動參與解題活動，因而助長了思考解題的文化，而降低傳統過於強調算則學習的氣氛。在容許學生不同的想法與解法下，開放、民主、容忍、有彈性，師生一起思考數學發現解法的教學歷程，相信是寫作活動能促進兒童數學解題能力發展的最主要關鍵。

除此，本研究實施不限於解題單元的「數學學習日誌」寫作，對於熟習傳統講解與練習學習方式、且未曾有數學寫作經驗的兒童而言，開始曾遭遇相當的困難，但經教學者不斷給予回饋，在引導與鼓勵重於要求與評價下，多數學生逐漸能藉日誌寫作與教學者進行對話，嘗試統整學習經驗，以及檢視自己的思考歷程，這對發展後設認知能力有莫大的助益。

本研究受實地研究以及現有量化工具的限制，而使個別與合作寫作教學型式並無太大差別；解題表現測驗中「回顧解答」只有一題，變異性不足，嚴重影響評量的信度，以及無法顯現出學生學習進展情形等欠周延之處。因此建議未來以持續性的班級觀察，掌握個別寫作與合作寫作在實際班級教學運作的效果；藉由卷宗評量(portfolio evaluation)與深度訪談，以瞭解學生解題的認知思考歷程；甚而，以低成就學生為對象，進行個案研究，探究以寫作幫助低成就學生學習數學的效果等，均是值得進一步研究的重要論題。

## 參考書目

- 任晟蓀(民75)，台東縣國民小學數學科新課程實施現況之研究，*國教之聲*，第十九卷，第三期。
- 周台傑、范金玉(民82)，*國民小學數學能力發展測驗(高級)*。彰化：精華印刷。
- 周筱亭(民84)，數學新課程的趨勢，載於歐用生等編：*國民小學新課程標準的精神與特色*(頁107-135)。台灣省國民學校教師研習會。

甯自強(民82)，國小數學科新課程的精神及改革動向—由建構主義的觀點來看。*科學教育學刊*，1(1),101-108。

劉好、許天維(民84)，數學科課程教材教法基本理念，載於周筱亭主編：*八十三學年度國民小學新課程數學科研討會論文暨會議實錄專輯*(頁11-28)。台灣省國民學校教師研習會。

劉秋木(民78)，數學解題行為評量表編製報告。七十七年度國科會專題研究報告(編號：NSC77-0111-S026-01A)。

劉祥通、周立勳(民86)，數學寫作活動—國小數學教學的新工具。*國民教育研究*，3，239-261。

劉錫麒(民80)，*合作反省思考的數學解題教學模式及其實徵研究*。國立臺灣師範大學教育研究所博士論文。

Azzolion, A.(1990). Write as a tool for teaching mathematics: The silence revolution. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch(Eds.), *Teaching mathematics in the 1990s*(pp.92-100). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Barta, J. J.(1991). Interactive problem solving and scaffolded instruction: The effects on the attitudes toward mathematical story problem of fifth grade student. *Dissertation abstracts*, 52, 3209A.

Bell, E. S. & Bell, R. N.(1985). Writing and mathematical problem solving: arguments in favor of synthesis. *School science and mathematics*, 85(3), 210-221.

Berlinghoff, W.(1989). Locally original mathematics through writing. In P. Connolly, & T. Vilardi(Eds.), *Writing to learn mathematics and science*. Teachers College Press: New York.

Burks, L.C.(1993). The use of writing as a means of teaching eight-grade students to use executive processes and heuristic strategies to solve. *Dissertation of the University of Michigan*. U.M.I.: Order Number 9409614.

Connolly, P.(1989). Writing and ecology of learning. In P. Connolly, & T. Vilardi(Eds.), *Writing to learn mathematics and science*. Teachers College Press: New York.

Emig, J.(1977). Writing as a model of learning. *College composition and communication*, 28, 122-128.

Fennell, F., & Ammon, R.(1985). Writing techniques for problem solvers. *Arithmetic teacher*, 33, 9-11.

Ford, M.(1990). The writing process:a strategy for problem solvers. *Arithmetic teacher*, 34, 35-38.

Garofalo, J.(1986). Metacognition knowledge and metacognitive process: Important influences on mathematical performance. *Research and teaching in developmental education*. 2(2), 34-39.

Garofalo, J.(1987). Metacognition and school mathematics. *Arithmetic teacher*, 34(9), 22-23.

Irons, R. R., & Irons, C. J.(1989). *Language experiences: A base for problem solving*. New directions for elementary school mathematics. Reston, VA: The National Council for Teachers of Mathematics.

McGhee, C.(1991). Mathematics the write way. *Instructor*, April, 36-38.

McIntosh, D.(1991). No time for writing in your class? *Mathematics Teacher*, 84(6), 423-433.

Miller, L.D.(1991). Writing to learn mathematics. *Mathematics Teacher*, October, 516-521.

National Council of Teachers of Mathematics(1980). *Curriculum and evaluation standards for*



- school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- O'Daffer, P. G.(1986). Problem solving tips for teachers. *Arithmetic teacher*, 34, 38-39.
- Peterson, P.L.(1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. *Educational researcher*, 17(5), 5-14.
- Price, J. J.(1989) Learning mathematics through writing: Some guidelines. *College math journal*, 20, 393-401.
- Rose, B.(1989). Writing and mathematics: theory and practice. In P. Connolly, & T. Vilaridi (Eds.), *Writing to learn mathematics and science*. Teachers College Press: New York.
- Schoenfeld, A. H.(1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld(Ed.). *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-216), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Silverman, F. L., Wingrad, K., & Strohauser, D.(1992). Student generated story problems. *Arithmetic Teacher*, 39, 6-12.
- Stenmark, J. K.(1991). *Mathematics assessment: Myths, models, good questions, and practical Suggestions*. Reston, Va. National Council of Teachers of Mathematics council.
- Vacca, R. T., & Vacca, J.(1986). *Content area reading*. Boston: Little, Brown Co.
- Van Horn,C.M.(1994). Effects of using the writing process in Combination with traditional problem-solving instruction. *Thesis of University of Houston-Clear Lake*. U.M.I.: Order Number 1357101.
- Wade, E. G.(1994). A study of the effects of a constructivist-based mathematics problem solving instructional program on the attitudes, self-confidence, unpublished dissertation of New Mexico State University.
- Wadling, E., Bitner, J., Patridge, E., & Austin, S.(1992). Have a problem? make the writing-mathematics connection. *Arithmetic teacher*, 40, 207-209.

周立勳，國立嘉義師範學院初等教育系副教授

劉祥通，國立嘉義師範學院數理教育系副教授

## 數學應用題的解題認知歷程之探討

古明峰

數學應用題在數學訓練課程中佔有重要的地位，從小學開始，應用題便普遍存在於數學課程中，應用題比一般的計算題涉及更複雜的認知歷程，是以日常的生活事件為材料且用語文型態來描述的數學問題情境。在數學學習的有關研究裡，應用題的解題歷程為當代數學教育探討的重要主題之一。本文將從數學應用題的性質、應用題的解題研究、應用題的解題歷程、成功的解題者、迷思概念與類型、應用題的解題教學等方面加以探討數學應用題的解題認知歷程。

關鍵字：應用題、解題、認知歷程

keywords：word problem、problem solving、cognitive process

### 壹、前言

數學是研究具體世界的許多的特殊事物中抽象化出來的秩序和形式的一種學問（林清山，民66）。大部分從事數學教育工作者都同意且認為數學能力包含兩個主要領域，一為概念理解，一為計算技能。概念的理解係指捷思(heuristics)、問題解決、及理解等方面。Thomas(1980)將數學問題的種類分為下列五項：

- 一、認知的問題：認知或回憶特殊事實、定義或定理敘述的問題。
- 二、運算法則的問題：可以一步一步用運算規則或程序解出來的問題。
- 三、應用題：可以將問題化為符號式，再解此代數式的問題。
- 四、探索式問題：不含解題策略提示的問題。例如：設三角形最長邊長分別為5公分或6公分或7公分，且邊長均為整數，這種 $\triangle$ 有多少個？等腰 $\triangle$ 的有幾個？
- 五、情境問題：提出一個問題情境，然後要求學生思考，或自行提出問題而後回答。

數學應用題(mathematic word problem)（以下簡稱應用題）在數學訓練課程中佔有重要的地位，從小學開始，應用題便普遍存在於數學課程中，應用題比一般的計算題涉及更複雜的認知歷程，是以日常的生活事件為材料且用語文型態來描述的數學問題情境(Cummins,1991)。在數學學習的有關研究裡，應用題的解題歷程為當代數學教育探討的重要主題之一。

本文將從數學應用題的性質、應用題的解題研究、應用題的解題歷程、成功