school mathematics. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics(1989). ***Curriculum and evaluation standards for school mathematics.*** *Reston, VA: Author.*

O'Daffer, P. G.(1986). Problem solving tips for teachers. ***Arithmetic teacher, 34,*** 38-39.

Peterson, P.L.(1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. ***Educational researcher, 17(5),*** 5-14.

Price, J. J.(1989) Learning mathematics through writing: Some guidelines. ***College math journal, 20,*** 393-401.

Rose, B.(1989). Writing and mathematics: theory and practice. In P. Connolly, & T. Vilardi (Eds.), ***Writing to learn mathematics and science.*** Teachers College Press: New York.

Schoenfeld, A. H.(1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld(Ed.). ***Cognitive science and mathematics education*** (pp. 189-216), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Silverman, F. L., Wingrad, K., & Strohauer, D.(1992). Student generated story problems. ***Arithmetic Teacher, 39,*** 6-12.

Stenmark, J. K.(1991). ***Mathematics assessment: Myths, models, good questions, and practical Suggestions.*** Reston, Va. National Council of Teachers of Mathematics council.

Vacca, R. T., & Vacca, J.(1986). ***Content area reading.*** Boston: Little, Brown Co.

Van Horn,C.M.(1994). Effects of using the writing process in Combination with traditional problem-solving instruction. ***Thesis of University of Houston-Clear Lake.*** U.M.I.: Order Number 1357101.

Wade, E. G.(1994). A study of the effects of a constructivist-based mathematics problem solving instructional program on the attitudes, self-confidence, unpublished dissertation of New Mexico State University.

Wadling, E., Bitner, J., Patridge, E., & Austin, S.(1992). Have a problem? make the writing-mathematics connection. ***Arithmetic teacher, 40,*** 207-209.

周立勳，國立嘉義師範學院初等教育系副教授

劉祥通，國立嘉義師範學院數理教育系副教授

教育研究資訊，1998.5，6(3)，頁 63-77

數學應用題的解題認知歷程之探討

古明峰

數學應用題在數學訓練課程中佔有重要的地位，從小學開始，應用題便普遍存在於數學課程中，應用題比一般的計算題涉及更複雜的認知歷程，是以日常的生活事件為材料且用語文型態來描述的數學問題情境。在數學學習的有關研究裡，應用題的解題歷程為當代數學教育探討的重要主題之一。本文將從數學應用題的性質、應用題的解題研究、應用題的解題歷程、成功的解題者、迷思概念與類型、應用題的解題教學等方面加以探討數學應用題的解題認知歷程。

關鍵字：應用題、解題、認知歷程

keywords：word problem、problem solving、cognitive process

壹、前言

數學是研究具體世界的許多的特殊事物中抽象化出來的秩序和形式的一種學問（林清山，民 66）。大部分從事數學教育工作者都同意且認為數學能力包含兩個主要領域，一為概念理解，一為計算技能。概念的理解係指捷思(heuristics)、問題解決、及理解等方面。Thomas(1980) 將數學問題的種類分為下列五項：

一、認知的問題：認知或回憶特殊事實、定義或定理敘述的問題。

二、運算法則的問題：可以一步一步用運算規則或程序解出來的問題。

三、應用題：可以將問題化為符號式，再解此代數式的問題。

四、探索式問題：不含解題策略提示的問題。例如：設三角形最長邊長分別為 5 公分或 6 公分或 7 公分，且邊長均為整數，這種△有多少個？等腰△的有幾個？

五、情境問題：提出一個問題情境，然後要求學生思考，或自行提出問題而後回答。

數學應用題(mathematic word problem)（以下簡稱應用題）在數學訓練課程中佔有重要的地位，從小學開始，應用題便普遍存在於數學課程中，應用題比一般的計算題涉及更複雜的認知歷程，是以日常的生活事件為材料且用語文型態來描述的數學問題情境(Cummins,1991)。在數學學習的有關研究裡，應用題的解題歷程為當代數學教育探討的重要主題之一。

本文將從數學應用題的性質、應用題的解題研究、應用題的解題歷程、成功

的解題者、迷思概念與類型、應用題的解題教學等方面加以探討數學應用題的解題認知歷程。

貳、應用題的性質

數學應用題是以日常生活事件爲材料，且用語文型態來描述數學問題，因此比一般演算涉及更複雜的認知歷程，原因是：應用題本身是一個特殊的文體，學生在解題時首先需整理題意，把「語文理解」轉換成「形式數學」，也就是按題意列式，然後再進行運算過程，而困難處就出在前半部的列式。在轉換過程中，解題者本身的一般語文知識和相對應的數學概念，均扮演著重要的角色（張新仁，民78）。

一般而言，應用題的解題常需要結合兩種能力：一是計算能力，一是理解能力。學生在遇到應用問題時，首先必須了解問題的陳述，回憶或激發出相關問題的知識結構，並試著建構出能表徵此問題的模式。最後再根據這個表徵而推論出結果（唐淑華，民78）。因此，應用題如「動物園裡有6隻獅子，獅子比老虎多2隻，問動物園裡有多少隻老虎？」與列式的計算題（如6-2=？）在解法上大不相同，是在於前者是一個特殊的文體，解題者必須整理題意，把「語文理解」轉譯成數學形式，也就是按題意列出算式，然後再進行運算的過程，求得解答，學生對此類問題感到困難的地方主要發生在前面如何將語文轉譯成算式(Lewis & Mayer,1987)。

兒童在解應用題時所犯的解法錯誤，常常由於對題目陳述不瞭解所致。如「小華和小明有5枝筆」將陳述中的小華和小明「有」5枝筆，誤解爲「各有」5枝筆。這種誤解將使問題與表徵建構無法一致，造成不正確的解題策略選擇。由於兒童對問題語文陳述不解或忽略，以致在問題表徵顯得毫無條理，選擇不當策略(Cummins,1991)。語文理解困難，使得兒童解題表現深受影響。

Yancy(1981)曾提出十項描述應用題特徵敘述，來說明應用題的困難。它們分別是：

一、題目中並未將需要計算的資料依次列出。

二、有許多無關資料夾雜在題目中。

三、題目呈現時，並未伴隨輔助圖表出現。

四、必要的資料，需從題目中推論出來。

五、需借用許多計算步驟，才能得到答案。

六、有許多線索字，需特別注意。

七、字彙通常適合於或高於學生的閱讀程度。

八、題目內容通常不爲學生所熟悉的。

九、計算過程較複雜與沈悶。

十、題目中，通常不用〝數字〞表示觀念（例如用〝一半〞或〝二倍〞……等字眼，而不用1/2或2倍）。

綜上所述，問題文字本身的敘述複雜程度會影響解題的難度。有很多的學生缺乏將文字題從文句的陳述意義及概念表徵，轉譯成有效的計算，或從文字問題的理解到建構能被運算解題歷程基模。

參、應用題的解題研究

在1970年代認知領域的解題研究裡，大部分是以一般問題或數學解題理論產生爲主要主題。晚近的研究則著重專門知識在特定領域與解題過程中的角色(Hegarty, Mayer, & Monk,1995)。有關特定類型的應用題與解題過程的稍早研究，數學應用題的研究著重在問題的結構表徵，如應用題題目中的數字大小、隱藏在句子數字結構中的關鍵字、問題情境中特殊情節事件所產生的作用，如問題中的關鍵字(key word) 所觸發的運算基模（例如「總共」賦予「加」，「剩下」則賦予「減」），或題目中的數字大小等，但研究結果在教學上的應用並不十分理想(Fuson & Willis, 1989; Stern , 1993)。有一些學者(Ginsburg & Yamamoto,1986; Peterson,Carpenter, & Fennema, 1989)對於這些研究提出嚴厲的批評，認爲這些研究只是注重問題的表面、機械的方法，而忽略了問題概念理解在解題過程中的重要性。而晚近則有從數學表面結構研究轉變到問題表徵(problem representation)之趨勢，這些研究如：語意經驗、語意結構、語意陳述等語文知識對問題難度的影響，或是如何將每一陳述句整合成連貫一致的問題表徵基模知識或在解題時所使用策略知識及錯誤類型之研究(Cummins,1991; Davis-Dorsey, Ross & Morrison, 1991; Hegarty,et al,1995; Lewis, 1989; Stern, 1993)等。這種新的趨向建立在兩個假設前提：

一、在應用題解題雖然使用相同的數學運算，但隱藏在問題關係的描述可能是不同的概念網路詞。

二、概念網路是解題者正確建構內在表徵的重要知識，兒童在解題深受問題語意結構所影響(De Corte & Verschaffel,1991)。

兒童未能成功地解題，有兩個因素必須加以考慮：⑴有關數學符號或程序性方面的知識。⑵有關問題情境中訊息知識對解題者的可觸接性(Bernardo & Okagaki, 1994)。就前者而言，解題者缺乏的是問題的基模知識；而後者則是解題者缺乏這類問題的經驗，尚未把握問題的語意，無法從問題的語意陳述內容敘述中，映射到基模知識。不少研究結果顯示數學解題的整個歷程中，將問題轉譯爲內在表徵

(internal representation) 的過程是造成學生解題困難的重要因素 (Hardians & Mestre, 1989; Lewis & Mayer, 1987)。

肆、應用題的解題歷程

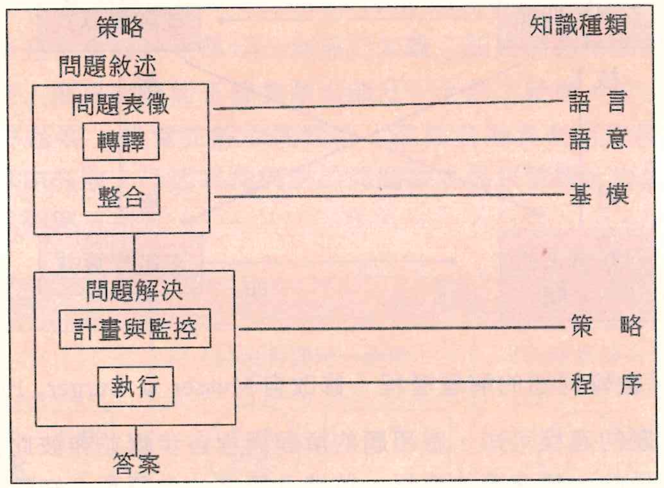
以作業來分析認知歷程，應用題解題包含兩個主要部分，一爲問題表徵，一爲問題解決。前者又可細分爲問題轉譯（problem translation）和問題整合（problem integratoin）；後者又可細分爲解題計畫及監控（solution planning, monitoring）與解題執行（solution execution）（Mayer,1991）。以下分別說明：

一、問題轉譯：轉譯是將每一陳述句轉化成某種內在表徵，解題者須了解句子的意義，則應具有語言知識 (linguistic knowledge) 及語意知識 (semantic knowledge)。例如：「有一間房間，地面的長爲 7.2 公尺，寬爲 5.4 公尺，如果要鋪滿邊長 30 公分的正方形磁磚，而且每一塊磁磚的價錢爲 30 元。那麼，鋪完此一房間，共需花多少錢？」在這問題的轉譯過程中，解題者要知道語句的文法結構、公尺、公分之間的換算關係，知道正方形的四邊相等……。教師可由一些指標來評量學生是否可以成功跨過此階段，例如可以要求學生重述題目目標、條件等方法，必要時能畫一圖表來輔助解題。

二、問題整合：整合是將問題中的訊息放在一起，使形成連貫一致的表徵，解題者須具有基模知識 (schema knowledge)，認識問題的類型。學生對不熟悉的問題顯示有困難，是因爲他們缺乏適當的基模。譬如前例，解題者須了解這一問題是一個矩形的面積問題，需要用到「面積＝長×寬」的公式。問題的整合同時也需要能夠區分那些資料與解答有關，那些資料與解答無關，並且分辨問題類型之間的差異。

三、解題計畫及監控：計畫與監控涉及想出和評估如何解題的策略。解題者須具有策略知識 (strategic knowledge)。例如對解題各步驟清楚，知道應先求出次目標答案，再利用此答案一步步逼近問題眞正的目標。譬如前例，解題者需找出房間的面積，找出所需要的磁磚數目，找出磁磚的價錢，且需同時能監控解題正在做的事情，如當你使用 7.2×5.4 時，你是以公尺乘公尺在算房間的面積。學生在解題時常懷有非創造性的態度，如認爲一個問題只有一種正確的解決方法。因此要用策略訓練來幫助學生，除了重視成果之外，更重要的是重視問題解決的「歷程」。

四、解題執行：執行是應用數學的法則，解答問題。解題者須具有程序性知識 (procedural knowledge)。如地磚例子，解題者必須能夠算出 $7.2 \times 5.4=$ ？或 $30 \times 432=$ ？的答案。正確的及自動化執行算術及代數程序是根據程序性知識。圖一所顯示爲 Mayer 的解題歷程與知識之間的關係。



圖一　解題歷程與知識關係（修改自 Mayer, 1991）

De Corte 與 Verschaffel(1991) 根據早期許多學者的實徵研究及他們自己的研究 (De Corte & Verschaffel,1985; Verschaffel,1984)，從認知心理學訊息處理取向 (information-processing approach) 的觀點，認爲小學算術應用題的解題能力模式應包含五個階段：

一、由題目處理活動產生複雜的目標導向：學生開始從題目的敘述語詞建構問題中整個集合詞與集合關係的抽象內在表徵。

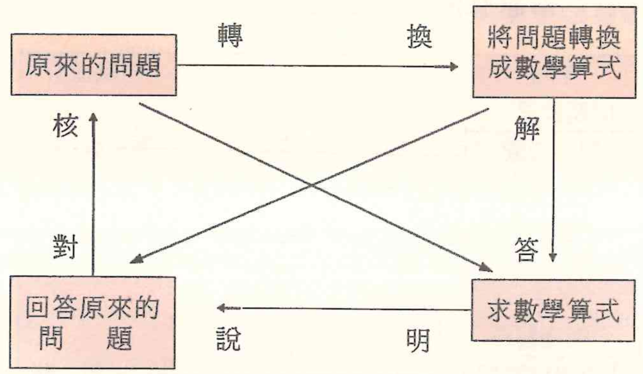
二、建立在上述的表徵基礎上，解題者正確選擇算術運算形式或非正式的計算策略，找尋問題表徵中的未知元素。

三、選擇行動或執行運算。

四、藉由行動結果完成及系統的陳述回答以取代問題中未知元素，使問題解題恢復到起始表徵。

五、對於解題程序中的每一步驟行動和結果加以檢視驗證。

Musser 與 Burger(1988) 把數學解題視爲一種回饋歷程，包含由原來的問題轉換成數學算式，再算出解答，以說明原來問題情境，並加以核對，如圖二箭號所指四個重要部分。



圖二　數學問題的解題歷程（修改自 Musser & Burger, 1988）

從上所述解題的過程可知，應用題的解題過程各步驟並非彼此獨立，而是彼此之間具有相互關係的一種連續的歷程，並涉及語言（含語意）知識、基模知識、策略知識及程序性知識。從題目敘述的理解到建構能被運算解題歷程基模。

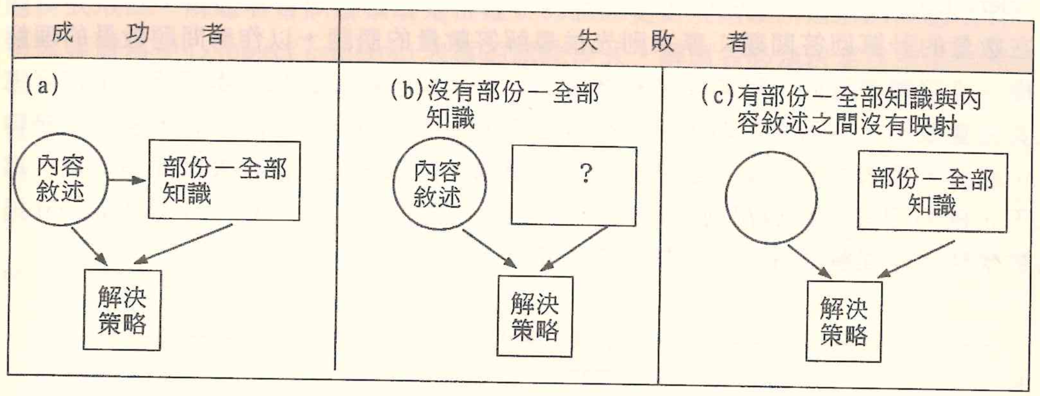
伍、成功的解題者

Fayol, Abdi 與 Gombert(1987) 認為當兒童遇到新的問題內容，須積極地建構問題表徵，因而對於各類型問題表徵尚未形成高度自動化基模目錄(reportiore)，在此過程中，工作記憶區的負荷較大，在有限的能力工作記憶區進行提取、理解、計算等瞭解過程。反之，學養豐富的解題者，通常擁有許多程序及其概述，能標明某一個程序對某一個情境可能有用，這些概述便成為有用的統合語言(meta-language)，使他能事先策劃，在有限的活動記憶空間內擬訂計畫。計畫既成，完成工作(Davis,1984)。學習者在腦海中持有的某一科學知識架構，若愈有組織，則愈有助於日後吸收新知及問題解決（張新仁，民 78）。

有經驗的解題者，較易利用問題概念結構，以協助解題(Machida & Carlson, 1984)。Reed(1989) 亦指出，好的解題者特徵之一是有能力依據一般數學規則、程序分辨問題，辨認內容敘述方式不同，能解相同解法的同構問題(isomorphic problem)。專家與生手之差異，在於專家能利用基模或知識結構，把問題加以正確分類，據此擬訂計算程式，生手則依據問題表面結構處理問題(Owen & Sweller, 1985)。

成功的解題能在面對問題與應用策略解題的過程之間，建立正確的心理表徵。依據 Riley, Greeno 與 Heller (1983) 的看法：一個有能力的解題者，擁有表徵問題關係的語意基模，並能將解題有關的一連串過程與此架構相連接，而語意基模的習得則有賴於邏輯關係陳述的學習，特別是有關部分—全部之關係知識。兒童在某一應

用題表現不佳，其所反應出可能是缺乏部分—全部之充分知識。此知識習得間接影響解題技能及問題的表徵基模。Cummins(1991) 則在研究中更進一步指出，兒童在解題失敗，並非完全由於缺乏部分—全部之知識；如將問題稍加改寫，使問題的語意陳述更為清楚，則兒童便能正確表徵出部分—全部之結構，較少困難。而改寫文句之研究結果亦証明，兒童在解決問題時，雖然有時具有足夠尋求解答的過程知識，但卻在演算中失敗，乃因為他們對於問題缺乏真正瞭解，以此觀點提出成功與失敗的解題模式如圖三所示。



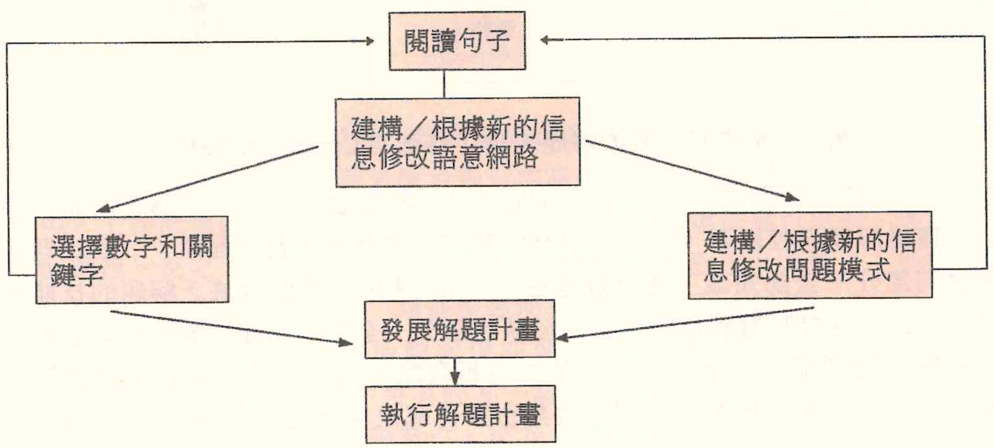
圖三　成功與失敗的解題表現（修改自 Cummins, 1991）

圖三(a)圖在說明成功解題者的解題表現；解題途徑有二：一為從問題內容文字敘述獲得解題過程線索，亦即從簡單的關鍵字映射到解題的程序；二為從題目陳述映射到部分－全部知識，觸發解題程序。(b)圖中的解題者缺乏解題的技能，僅能利用關鍵字直接映射到程序，且由於缺乏部分－全部的知識，無法從語意的內容敘述基模映射到部分－全部知識。依據邏輯觀點，若某一內容敘述，沒有解決線索，又缺乏另一途徑被選擇，則問題無法獲得解決。(c)圖中的解題者解題失敗是因題目敘述與部分－全部之間缺乏或不適當映射所致，以致無法觸接部分－全部的結構。依據語言學的發展觀點，可藉由文字的改寫以增加部分－全部知識與內容敘述之間連結可能，以改善解題表現。

兒童解題失敗若從數學邏輯的觀點，是因沒有抓取到部分－全部的結構表徵，不管問題是何種文字方式陳述。就語言發展的觀點，兒童解題失敗，常因缺乏這類問題類型經驗，尚未把握問題意義，亦即對問題陳述不瞭解所致，並不全是缺乏部分－全部的關係基模知識，而是可能缺乏映射到問題部分－全部之間連結陳述所使用知識的問題類型經驗。

Hegarty,Mayer 與 Green(1992) 以大學生為對象，比較成功與不成功的解題者。在算術應用題理解歷程，不成功的解題者在面對應用題，常從問題中選擇數字和關

鍵字著手，由關鍵字所觸發（如加法的關鍵字是更多，減法的關鍵字是更少）。就問題中所涉入的數字和關係詞如更多或更少加以選擇，直接就問題陳述關鍵字命題，著手計算產生答案，並未對問題的情境加以建構，稱之爲直接轉譯。而成功的解題者，則嘗試將問題情境所描述的轉譯建構成問題情境所記述的心理模式 (mental model)，以作爲解題計畫依據，將這種程序稱之爲「問題模式策略」。不成功的解題者在解題時偏愛使用「直接轉譯策略」，相對的成功解題者，則偏愛使用「問題模式策略」。直接轉譯是採關鍵字方式，抓取數字，計算在先，思考在後 (Stigler, Lee, & Stevenson, 1990)。在專家一生手差異的研究顯示，生手傾向把重點放在數量的計算回答問題；專家則先找尋解答數量的語詞，以作爲問題數量的理解基礎。直接轉譯取向，不需要依賴多方面問題類型知識，在訊息處理時，工作記憶區負荷量較小。然而當問題情境對於解答情境描述是隱含的 (implicit)，使用直接轉譯策略者，因未對問題情境訊息完全加以建構，以致未能正確地表徵問題情境，導致不正確的回答。爲檢視兩個策略理解歷程，並加以對照，Hegarty 等人 (1995) 提出數學應用題理解歷程模式，如圖四所示。



圖四　數學應用題理解歷程模式（修改自 Hegarty, Mayer & Monk, 1995)

圖四爲直接轉譯策略與問題模式策略解題歷程，解題者依據題目的內容閱讀，引申出特定的數學表徵，發展出解題計畫，並將此分爲三個階段加以對照：

階段一：依據原文建構 (construction of the text base)

解題者閱讀問題陳述後，他必須將現有原文依據陳述統整新的訊息。解題者主要的工作是轉譯每一陳述爲內在的命題表徵，並且統整其他問題陳述的內在表徵，以建構語意網路表徵。

階段二：特殊的數學表徵建構 (construction of a mathematics-specific representation)

解題者被數學解題目標所引導，以瞭解每一陳述，並以建構特殊的數學表徵。在此階段使用直接轉譯解題取向與問題模式取向有所不同。直接轉譯取向，解題者在第二階段決定在現有存在的過程陳述是否包含關鍵事實。如下列例子：在台中每條奶油售價 65 元，它的售價比在台北每條少 2 元，若欲在台北買 4 條奶油，要付多少錢？

像數字 65 或是問題關係陳述〝少〞，解題者除了注意數字和關鍵字外，將原有題目其他訊息加以忽略，其訊息表徵較原來題意少，僅在關鍵字和數字打轉。問題模式取向，解題者嘗試建構或是根據新的訊息更新現階段所理解的問題模式。他是以客體爲中心 (object centered) 表徵的問題模式，解題者必須決定目前過程陳述是否提及新的客體，或是客體已存在原有問題模式表徵。總之，在問題的理解階段，建構問題模式是從以陳述爲主，改變他的表徵格式到客體爲中心表徵；相對直接轉譯取向，表徵的訊息較原來題目所包含的少，陳述表徵的建構較貧乏，在建構數字的特殊數學表徵與變項之間並未緊繫著，可能建立錯誤的關係知識。

階段三：解題計畫的建構

解題者依據其認爲與解題有關的資料，準備好解題所需的算術計算。在使用直接轉譯取向解題者，常依據關鍵字解題，如關係陳述是少於，則大概與減法相聯結，因而，當正確的解法是加時，常伴隨著使用減的錯誤的解題計畫。而解題者若犯此類錯誤，將無法發覺到。相對解題者若使用問題模式取向，包括以目標爲主的表徵的解題計畫表徵較爲充分。上述解題歷程雖分爲三個階段以利說明，在實際解題時，解題者常會反覆思考閱讀問題。

綜上所述，成功的解題者具有理解題目內容，了解數學語詞概念的能力，依據問題的基模辨識相同、相異與類似題，選擇合適的程序及可用的資料，將問題表徵化，以求得解決。學生未能成功地解題，則是有些迷失概念 (misconception)，或是缺乏問題基模知識。

陸、迷思概念與類型

Lewis 與 Mayer(1987) 認爲多數學生未能成功地解題，常出在問題的理解表徵甚於問題的求解，所以問題的解題教學應著重問題表徵訓練，然而大部分的教學卻著重問題的解決，特別是在計算的執行。在應用題理解與解題應包括語文理解、情境描寫的理解，找出方程式能力及計算能力等多種不同技能 (Stern,1993)。

學生在接受數學、科學或其他教學之前，並不是處於一空白的思想狀態，而就老師所教的，完全加以學習；實際上學生會主動建構或「發明」知識。迷失概念的發生可能源自於學生日常生活經驗的自我學習所得；也可能來自於學生對老師機械

式教學的一知半解。錯誤的演算規則並非由於粗心大意的結果。Resnick(1985) 認爲錯誤的演算規則產生的原因有二：一是學習者把演算規則變化到其他的情境，另一原因是學生把演算公式或規則的特有條件解除（引自張鳳燕，民 80）。

Brown 與 Van Lehn(1980) 認爲人類資訊處理通則爲最頂層的程式必須運作不停。例如：若高層目標召喚某一程式，該程式又召喚所需資訊材料，整個系統不能因資料缺乏而停擺，就此提出「修補理論」(repair theory)。修補理論是說學生在碰到數學難題時，因其所學的不足以解決問題，爲了要解決所面對的情境，學習者乃主動建構知識 (Davis, 1984)。有系統的解題錯誤絕非偶然，就像其他數學上的錯誤一般，很可能是由於學生使用一套「謬誤算則」(buggy algorithn) 所致。

Blando 等人則以「錯誤類推理論」(misgeneralization theory) 來解釋錯誤行爲。他認爲，錯誤來自學生所推論的許多適合於範例相似問題，但卻不正確的法則，這種看法認爲錯誤發生於形成假設的編碼 (encoding) 階段（徐文鈺，民 81）。

Fischbein 、Deri 、Nello 與 Marino(1985) 根據他本身的研究以及綜合前人的研究 (Bell et al., 1984;Ekenstam & Geoger,1983)，基於對學童之乘除表現，提出了暗隱模式 (implicit model)，又稱直覺模式 (intuitive model)，其假設如下：「每一種基本的算術運算，通常都連接著一種暗隱的、下意識的模式，它是源於直覺的。當人們針對包含兩個數目字的應用題時，並非直接由題目文字中獲得訊息、線索，來決定運算符號，而是透過此模式的中介。」

Fischbein 等人 (1985) 認爲應用題中，乘法的暗隱模式是連加，因此受限於被乘數須爲正數，且乘數爲正整數，所以產生了「乘法會變大」的錯誤見解，Fischbein 等人及其它的研究發現，當乘數爲純小數時，則錯誤率大增，但當乘數爲帶小數，且其整數部分相對於小數部分相當大時，則錯誤率較低，Fischbein 等人稱此爲吸收效應 (absorption effect)，猶如小數點以後部分視而不見，被吸收進入整數部分。就除法的暗隱模式言，在等分除方面，是受限於除數須爲整數，且小於被除數，以至於形成商數必小於被除數，即「除法會變小」的錯誤見解，在包含除方面，是由連減法導入，因此認爲被除數須大於除數，但學童對於等分除和包含除二者並沒有明顯區別，因此包含除的表現尚受等分除的暗隱模式所影響。

對於上述暗隱模式的原因，Fischbein 等人 (1985) 認爲有二，一爲整數運算教學中的不完整概念，無法產生適當的同化和調適，以至於概念無法重整；另一爲說明了人類心靈活動之原始，常源於直覺的基本知識。如「16 位小朋友合買了 4 公斤的巧克力，經過平分後，每位小朋友可分得多少公斤？」。「正確算式」：4 ÷ 16 。「學童一般錯誤算式」：16 ÷ 4，學童看到此題是「分東西」，在直覺上，應該用除法，由於典型的等分除法中，是較大的數除以較小的數，因此乃選擇了 16 ÷ 4 的算式。

De Corte 與 Verschaffel(1991) 根據其實證的研究指出，兒童在解應用題時，若常犯有明顯規則性或系統性錯誤，其結果所顯示兒童對問題情境有迷思概念，未能充分掌握理解問題的根本語意基模，未必因爲單純的猜測或粗心所致。從學生觀點看，他們不過是根據自己所持有的概念和技能，做了自己認爲合理而適當的處理，解題所顯現出之錯誤形式，可能因對於問題內容不瞭解或是表徵錯誤所致。從事於錯誤類型分析，有助於釐清教師對學生演算錯誤所持的看法，並可協助從事學習診斷與補救教學。

從上述應用問題的解題歷程、成功的解題及迷失概念與類型分析探討，影響解題者的表現，則包含數學知識（術語、符號、概念原知識）、語文知識（語意結構、陳述及經驗）及解題策略等認知因素。除此之外，解題者期望、價值、感情等動機因素亦扮演重要的角色，在這方面的實徵研究亦日益受到重視且獲得證實（張景媛，民 83）。本文因篇幅有限，不擬探討。

柒、應用題的解題教學

許多的研究發現 (Fuson & Willis, 1989; Lewis, 1989; Machida & Carlson, 1984; Willis & Fuson, 1988)，透過教師有效的教學策略，可以幫助學生數學解題能力。教師亦可以改變對解題的態度，使得學生對於數學較以前喜愛，且願意改善不良的解題習慣。然而目前國內的數學科教學，卻過分偏向於抽象符號的教學，在教學時未能配合學生的認知結構，造成學習的困擾（古明峰，民 86）。經驗豐富與經驗不足的國小數學教師兩者的最大差異，並不在於學科知識的多寡，而是有經驗的數學教師所擁有的學科知識較有組織、體系；經驗不足的數學教師擁有的學科知識較爲凌亂、缺乏組織。此外，在教材呈現時，有經驗的數學教師重視舊概念的複習，以及前後單元的銜接，並在教材呈現時，清晰而有體系；至於經驗不足的教師，各單元的內容缺乏銜接，且教材呈現趨於片段，缺乏組織（張新仁，民 78）。大部份研究認知的學者 (Davis, 1984; Peterson, Carpenter, & Fennema, 1989) 都認爲新的知識學習及教導必須建立在學習者已有的相關知識基礎上。教師在教學時，需喚起學習者已有的知識。

Cooper 與 Sweller(1987) 認爲應用題的教學儘量避免讓學生練習過多的類似題，而應注重例題的內容結構能否與學生所擁有的知識結構相聯繫。Davis(1984) 反對將數學視爲一堆運算的集合，而需靠背誦和計算來幫助記憶學習；認爲數學的教學是以學生爲中心，從自己的經驗中建構與理解數學的觀念和方法；並且提出數學解題的基本步驟，以爲教師教學之參考，這些步驟隨著題目的不同，可能有些會被重複或被省略。

一、在題目中找尋線索做為指引，以便憶取解題的初步架構。

二、開始憶取解題知識的工作。

三、逐漸形成問題的心理表徵。

四、利用資料形成表徵。

五、將問題資料映射(mapping)到問題表徵。

六、做問題表徵與知識表徵之間的映射。

七、評估所憶取的事物是否已經足夠、映射是否正確。

八、必要時運用解題的策略，設定次目標，以修正原有的表徵。

九、必要時循環使用上述的步驟。

十、使用「終止」規則，以決定何時停。

解題者能將所學的方法與問題連結起來，並將這種知識運用在新的問題情境上，而非學習記憶零星的或固定的解題策略。學習者無法正確地解題，不應該認為他缺乏能力，教師應尋找更多的資料，精確地瞭解究竟什麼因素影響學生的表現，阻礙他的進步？學生做不來的是什麼？以及犯的錯誤是什麼？何以犯這種錯誤？

Grows(1985)認為要一一地將數學解題策略列出來討論是不太可能，但是有些原則性的觀念，倒是值得注意。例如：

第一、教師要將解題的一般歷程讓學生知道，不可將答案算法馬上告訴學生，而是漸進地引導學生找尋解答。

第二、適時地提供學生問題與回饋，對學生解題將更有幫助。

第三、須將新的知識與學生舊經驗做連結，此一部份最能預測學生是否眞正地學到解題的技巧與概念。

第四、從訊息處理論的觀點，教師應幫助學生發展後設認知(meta-cognition)的能力，因為此種能力，才能使學生日後遇到問題時，可以自行判斷如何地解題。

第五、應教導學生一些實用性的技巧。例如：畫個輔助圖表、找出題目各部份之間的關係……等等。

綜上所述，教師在數學的教學應注意學生的思考，而不是毫無意義地教學生學習一些規則和解題訣竅的機械方法。教師在教學活動時，不應常常期望學生的數學推理和自己的相同。教學的主要功能在幫助學生建構知識，激發學生修正自己的概念，發展自己的解題方法，克服解題的障礙。教材中應呈現實用的案例，並提供機會讓兒童將數學應用到他周遭環境中重要的事物處理上。

捌、結語

Frederisken(1984)將歷年來認知心理學家有關「問題解決」的研究加以整理，認為目前問題解決的理論包含了三個主要成分，即問題的表徵、解題的步驟及問題類型辨識。同時指出我們對整個解題認知歷程的認識並不完整，要達到實用的階段，仍然還有一段很長的距離。本文試從有關的文獻及研究中探討、分析應用題的性質、應用題的解題研究、應用題的解題歷程、成功的解題者、迷思概念與類型、應用題的解題教學等文獻加以整理分析歸納。如何對整個解題過程有更進一步的瞭解，使學生具備基本問題解決能力與技巧，使得他們將來離開學校後，進入「實際生活」時會使用這些技巧及數學邏輯概念，去解決他們所面對的問題，值得我們繼續努力加以研究。

參考書目

古明峰（民86），孩子為什麼害怕數學--談數學焦慮。**國教世紀，175期，**29-33頁。

林清山（民66），**數學課程的設計和教學理論基礎**。國立台灣師範大學科學教育中心。

徐文鈺（民81），**圖示策略訓練課程對國小五年級學生的數學應用題解題能力與錯誤類型之影響**。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所碩士論文。

唐淑華（民78），**語文理解課程對增進國一學生數學理解能力之實驗研究**。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所碩士論文。

張景媛（民83），**國中數學學習歷程統整模式的驗證及應用學生建構數學概念的分析及數學文字題教學策略的研究**。國立臺灣師範大學教育心理輔導研究所博士論文。

張新仁（民78），不同學科的認知歷程分析。**教育研究，3期，**43－59頁。

張鳳燕（民80），教導心理學微觀——從概念學習談國小數學教育。**師友月刊，80年2月，**24－29頁。

Bernardo, A.B.I., & Okagaki, L.(1994). Role of symbolic knowledge and problem-information context in solving word problems. *Journal of educational psychology, 86,* 212-220.

Brown, J.S., & Van Lehn, K.(1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive science, 4,* 379-426.

Cooper, G. A., & Sweller, J.(1987). Effects of schema acquistion and rule automation on mathematical problem solving transfer. *Journal of educational psychology, 79,* 347-362.

Cummins, D.D.(1991).Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and instruction,8,* 261-289.

Davis, R.B.(1984). *Learning mathematics: The Cognitive science approach to mathematics education.* Norwood, NJ:Ablex.

Davis-Dorsey,J., Ross, S.M., & Morrison, G.R.(1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematics word problems. *Journal of educational psychology, 83,* 61-68.

De Corte, E., & Verschaffel, L.(1991). Some factors influencing the solution of addition and subtraction word problems. In K.Durkin and B. Shire(Eds.), *Language in mathematical*

education.(pp.117-130) London: Open University.

Fayol, M., Abdi, H., & Gombert, J.(1987). Arithmetic problem formulation and working memory load. ***Cognition and instruction, 3,*** 187-202.

Fischbein, E., & Deri M., Nello, M.S., & Marino, M. S.(1985). The role of implicit models in solving decimal problems in multiplication and division. ***Journal for research in mathematics education. 16,*** 3-17.

Fuson, K.C., & Willis, G.B.(1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. ***Journal of educational psychology, 81,***514-520.

Ginsburg, H.P., & Yamamoto, T.(1986). Understsnding,motivation, and teaching: Comment on Lampert's "Knowing, Doing, and Teaching Multiplication. "***Cognition and instruction, 3,*** 357-370.

Grows, P.A.(1985). The teacher and classroom instruction: Neglected themes in problem solving research. In E. A. Sliver(Ed.), ***Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perpectives***(pp.295-308). Hillsdale, New Jersey: Lawerence Erlbaum Associates.

Hegarty, M., Mayer, R.E., & Green, C.E.(1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students' eye fixations. ***Journal of educational psychology, 84,*** 76-84.

Hegarty, M., Mayer, R.E., & Monk, C.A.(1995). Comprehension of successful and unsuccessful problem solvers. ***Journal of educational psychology, 87,*** 18-32.

Lewis, A.B.(1989). Training students to represent arithmetic word problems. ***Journal of educational psychology, 81,*** 521-531.

Lewis, A.B., & Mayer, R.E.(1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word prblems. ***Journal of educational psychology, 79,*** 361-371.

Machida, K., & Carlson, J.(1984). Effects of verbal mediation strategy on cognitive processes in mathematics learning. ***Journal of educational psychology, 76,*** 1382-1385.

Mayer, R.E.(1991). ***Thinking problem solving, cognition.*** New York: Freeman.

Musser, G.L., & Burger, W.F.(1988). ***Mathematics for elementary teacher.*** New York: Macmillan Publishing Company.

Owen, E., & Sweller, J.(1985). What do students learn while solving mathematics problem? ***Journal of educational psychology, 77,*** 272-284.

Peterson, P.L., Carpenter, T., & Fennema, E.(1989). Teachers' knowledge of students' knowledge in mathmatics problem solving: Correlational and case analyses. ***Journal of educational psychology, 81,***558-569.

Reed, S.K.,(1989). Constraints on the abstraction of solutions. ***Journal of educational psychology, 81,*** 532-540.

Riley, M.S., Greeno, J.G., & Heller, J.I.(1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H.P. Ginberg(Ed.), ***The development of mathematical thinking*** (pp.153-196). Orlando, FL:Academic.

Thomas, C.P.(1980). ***The effect of instruction on first-grade children's initial solution processes for basic addition and subtraction problems.*** A paper presented at the 1980 Annual Meeting of the American Educational Research Association.

Stern, E.(1993). What makes certain arithemetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children. ***Journal of educational psychology, 85,*** 7-23.

Stigler, J.W., Lee, S-Y., & Stevenson, H.W.(1990). ***Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children.*** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Willis, G.B., & Fuson, K.C.(1988). Teaching children to use schematic drawing to solve addition and subtraction word problems. ***Journal of educational psychology, 80,*** 192-201.

Yancy, A.V.(1981). ***Pupil generated diagrams as strategy for solving word problems for elementary mathematics*** (Journal Announcement: RIEJAN86), Specialist in Education Degree Thesis, University of Louisville. (ERIC Document Repuoduction Service No.ED260992 SE045962).

古明峰，國立新竹師範學院副教授