《當代教育研究》季刊
第二十卷第二期，2012年6月，頁93-133

小六學生不同代數表徵的解題表現、教師布題順序與代數教學信念之研究

劉家樟* 楊凱琳** 許慧玉***

摘　要

本研究主要探討三個問題，包括：第一是臺灣國小六年級學生在不同代數試題表徵（故事、文字、符號）的解題表現；第二是國小數學教師對這三類試題表徵的教學布題序列及背後的教學信念；第三是學生的解題表現與教師信念間之一致性檢驗。研究結果發現：一、在相同數學內涵之下，國小六年級學生在符號題表現最好，故事題表現最差。但進一步分析後發現，學生雖在符號題的答題較佳，代數思維的發展仍未臻成熟。二、約80%國小數學科教師的布題順序爲符號、文字、故事，且具有符號優先教學觀（symbol-precedence view）。這些教師認爲，學生在符號題表現較好，文字題應直接教導正確解題

* 劉家樟，中壢國小數學教師
電子郵件：jj580125@yahoo.com.tw
** 楊凱琳，國立臺灣師範大學數學系助理教授
電子郵件：kailin@ntnu.edu.tw
*** 許慧玉，國立臺灣師範大學數學系博士後研究（通訊作者）
電子郵件：hsu.huiyu@gmail.com
本文係由劉家樟2006年中原大學教育研究所碩士班論文資料分析改寫。
投稿日期：2011年9月16日；修正日期：2011年11月9日；接受日期：2012年5月24日

法或先熟悉符號操作過程，也較贊同代數方程式是解決故事或文字題最有效的方法。剩下20%的教師則是認為，應先教學生故事題，其教學信念明顯偏向非符號優先與非示範解題法的教學觀。三、進一步比較教師布題順序及代數教學信念與學生解題表現間的一致性，結果發現，教師無法完全準確地預測學生的答題表現。更有甚者，教學信念偏向非符號優先與非清楚示範解題法的教師，預測學生的答題表現最不準確。

關鍵詞： 符號優先教學觀、代數教學信念、符號題、文字題、故事題

Contemporary Educational Research Quarterly
June, 2012, Vol.20 No.2, pp. 93-133

The Study of Six Graders' Problem-Solving Performance, Teachers' Problem Posing and Teaching Beliefs in Different Algebra Problems

Chia-Chang Liu* Kai-Lin Yang** Hui-Yu Hsu***

Abstract

This paper presents three investigations related to algebra problems: (1) Taiwanese sixth graders' problem-solving performance on story problems, word-equation problems, and equation problems; (2) Taiwanese mathematics teachers' posing sequences towards these problems and their hidden teaching beliefs; and (3) the relationship between students' performance and teachers' beliefs. These analyses revealed that sixth graders performed the best on equation problems and the worst on story problems. Further investigation indicated that although students performed

* Chia-Chang Liu, Mathematics Teacher, Chung-Li Elementary School
E-mail: jj580125@yahoo.com.tw

** Kai-Lin Yang, Assistant Professor, Mathematics Department, National Taiwan Normal University
E-mail: kailin@ntnu.edu.tw

*** Hui-Yu Hsu, Post-doc fellow, Mathematics Department, National Taiwan Normal University, Correspondence Author
E-mail: hsu.huiyu@gmail.com

Manuscript recieved: Sept. 16, 2011; Modified: Nov. 9, 2011; Accepted: May 24, 2012

better on equation problems, their algebraic thinking was still not well-developed. Second, about 80% mathematics teachers posed problems with the sequences of equation problems, word-equation problems, and story problems, respectively; they preferred the symbol-precedence view. They thought equation problems were easiest for students, and that word-equation problems should teach students how to directly find algebraic solutions and the procedures of algebraic operations. They also agreed that algebraic equations were the most effective way to solve story problems and word-equation problems. The remaining teachers, who expressed a non-symbol-precedence view, believed that story problems should be taught first. Third, the comparisons showed the inconsistency between students' performance and teachers' predictions, especially those teachers with a non-symbol-precedence belief made the worst predictions.

Keywords: symbol-precedence view, teaching beliefs in algebra, equation problems, word-equation problems, story problems

壹、緒論

代數教學強調培養學生有意義地理解符號式子及式子背後的抽象意義，以避免學生機械式地背誦規則與程序（Kieran, 1992, 2007）。基於此，教師應從具體情境脈絡中培養學生量化推理能力（quantitative reasoning）（Thompson, 1993），瞭解脈絡中元素之間的關係並建構學生「去情境化」（decontextualized）的心智表徵（Piaget & Inhelder, 1967）。而此脈絡關係的推論過程逐漸轉換成可操作的抽象代數式子，進一步將多個代數操作規則濃縮成單一規則的能力，最後具體化（reification）成抽象的代數意義（Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994）。

為瞭解學生代數思維與算術思維的發展，尤其是情境如何橋接兩種思維， 數學教育學者從學生在不同表徵試題的解題表現出發，試圖分析出情境與兩種思維之間的關聯性。其中，以Koedinger與Nathan的研究最為著稱（Koedinger & Nathan, 2004; Nathan & Koedinger, 2000a, 2000b）。Koedinger與Nathan設計具相同數學內涵（例如數字、四則運算）的試題組，並控制其他干擾變項，直接探討情境故事、文字及符號等三種表徵對學生解題表現的影響。其中，故事題定義為以真實情境故事表徵數學的應用問題；文字題是指一般單純口語敘述問題的數學應用題；符號題則是以數字、數學符號或文字符號等所列的方程式。[1]研究發現，美國已學習代數的學生在以情境脈絡為主的故事題或是描述性的文字題，答題均顯著優於符號題。換句話說，情境脈絡的故事題

[1] 茲將相同數學內涵但三種不同試題表徵舉例如下：故事題：「小明從大賣場買了8盒面紙回家後，他將每盒面紙的價錢乘以8，然後加上錢包內的72元，發現他原來有200元，請問每盒面紙的價錢是多少？」文字題：「某數乘以8再加上72，得到的答案是200，這個數是多少？」符號題：「X×8＋72＝200」。

較能促成學生解題表現；而代數抽象符號試題對美國學生則較困難。但此研究結果似乎不同於臺灣。之前有研究提出臺灣學生在代數題表現較好（黃明瑩，2000），且國中教科書代數單元設計起始於文字題，然後再大量地讓學生熟悉抽象符號操作。而情境題則當成應用練習題，目的在使學生能靈活地以代數式解不同情境脈題。對比於臺灣學生和西方學生解題表現的可能差異，以及考量臺灣考試導向教育環境（Lin & Tsao, 1999; Lin & Yang, 2005），學生在這三類試題表徵的解題表現值得進一步探討。

除分析學生的解題表現外，本研究也探究臺灣教師在三類試題表徵的布題順序及其背後的代數教學信念，同時，亦比較教師的布題順序與學生實際答題表現的一致性，以瞭解教師信念與布題順序如何影響臺灣學生的解題表現。許多研究者指出，教學知識與信念明顯影響教師解讀與執行課程內容（Ball, 1988; Borko et al., 1992; Raymond, 1997）。特別是教師面對教學「關鍵時刻」的判斷時，標準通常取決於教師個人數學信念和從前的學習經驗（Shroyer, 1978），且此將進而影響學生的學習成效。在代數教學信念，Nathan與Koedinger（2000a）發現，高中教師及數學教育研究者普遍存在符號優先教學觀點（symbol-precedence view），認爲教學應先由代數符號解題再轉爲故事題，此觀點與代數認知發展的研究相違背。Nathan與Petrosino（2003）發現，尤其是數學專業背景的職前教師，其因自身學科學習經驗，反倒容易錯誤地預測學生的學習表現。他們稱此現象爲專家盲點（expert blind spot）。

爲深入瞭解臺灣學生的代數認知發展、教師代數教學與本身信念及其學生學習的關係，本研究提出三個研究問題敘述如下：

1.在相同數學內涵之下，臺灣國小六年級學生在故事、文字及符號等三種不同試題表徵的解題表現爲何？

2.國小數學教師存在的代數教學信念爲何？他們如何預期學生答題表現，

而決定三類試題的教學布題順序？

3.教師布題順序及代數教學信念是否與學生解題表現一致？若不一致，有何差異？

貳、文獻探討

一、不同試題表徵的解題思維

認知心理學定義問題解決為：

> 個人試著去達成的目標，在沒有立即可用的答案下，從所給定的條件狀態著手，將其轉換為應用的方法，以找出答案。（Sternberg, 1994, 2003）

而數學解題是指在沒有立即可用的算式、方法及路徑時，必須融合以往的知識和經驗，運用數學概念、原理、原則及數學方法，以消弭目前狀態和欲達到之目標狀態間存有的距離或障礙。

數學一般可分計算題與文字題。計算題只需熟練數學的基本運算規則，而文字題還需用到語文知識，依照問題的脈絡，將自然語言（ordinary language）轉譯成算術語言（arithmetic language）或代數語言（algebra language），才能依照數學的運算程序獲得答案（Mayer, 1992）。因此，數學問題的呈現直接影響學生思維或解題表現。Koedinger與Nathan（2004）就三種不同試題表徵（故事題、文字題、符號題），提出決定學生解題表現三大假設：（一）符號促成假設（symbolic facilitation hypothesis），意指符號題因能避免文字理解及將題目條件轉換數學式子的認知負荷，所以為三種試題中難度最低的。（二）情境促成假設（situation facilitation hypothesis），泛指故事情境可幫助學生擷取先備解題經驗，有效地決定解題執行策略。據此，學生對故事情

境的熟悉程度是決定情境促成的主因，且學生在故事題犯錯的比例應比去情境化的試題低。（三）文字促成假設（verbal facilitation hypothesis），源於代數方程式認知的困難度對學生在符號題解題表現的影響。在此假設下，學生在故事題和文字題產生的錯誤應比符號題來得少。

另外，三類試題解題歷程與學生算術思維和代數思維之發展息息相關。例如解情境題時，學生可避開代數思維，利用算術思維來推論給定情境之間關係，得到答案。尤其文獻指出，算術表徵解題到代數表徵解題間的轉換是許多學生的主要學習困難之一（Booth, 1984; Kieran, 1989）。特別是九年一貫數學領域課程，由六年級開始進入代數的學習，此為算術過渡至代數學習的啓蒙階段。在此啓蒙階段，學生通常會混淆算術與代數本質上的差異（Booth, 1984; van Amerom, 2003），常以算術思維理解代數符號與代數運算，造成學習困難。基本上，算術思維著重運用數量的計算求出答案的過程，這個過程是程序性的、含情境的、具有特殊性的，甚而是建立在直觀上的；相對而言，代數思維則倚重關係的符號化及其運算，這個運算是結構性的、去情境的、具有一般性的、形式化的，並且在某種程度上是無法依賴直觀的（Booth, 1984; Kieran, 1992, 2007; Lesh, Post, & Behr, 1987）。然而，運用算術思維的解題是在特定的情境對具體的數量進行推理，解題步驟較有彈性，而運用代數思維的解題，則在程序上較為固定。另外，算術的解法為單向前進，較不具一般通用性；而代數的解法具一般性，且可雙向同時進行。算術解法一般先做實驗歸納的工作，從而求得解決該類問題的公式，此方法缺乏普遍性；而代數解法的準備工作是引入未知數符號，把問題中的數量關係，尤其是等量關係用代數方程式表示出來，然後再利用「運算率」和「等式性質」求出方程式中未知量的值，所以，代數法直截了當、簡潔明快、具有普遍性，也具有統一性，故其解法在一般人眼中優於算術解法。但是否因為代數的解題程序固定，不若算術解題彈性，容

易使學生機械性地記憶解題規則，因此導致解題表現較好，可是，根本上，學生對於代數式子的理解仍不清楚，則需要進一步探討。

學者也建議，使用情境脈絡的故事題與文字題作爲過渡學生算術思維到代數思維的橋樑（Koedinger & Nathan, 2004）。例如：文字應用題（arithmetic word problem）在國小普遍存在於一般的數學課程，且占有重要地位。到了國小六年級及國中階段，可將之提升至可用假設文字符號的方式來解題的代數文字題。在解題的思維歷程中，或使用代數思維，或使用算術思維，解題者必須選擇最容易理解且快速的方法；若題目是單向前進，便不需逆向思考適合算術思維的解法，例如「每枝鉛筆4元，買了5枝鉛筆後，還剩3元，問原有多少錢？」其算法可單純順向思考，而列出算式：「4×5＋3＝23」；若題目可雙向同時進行，或涉及逆向思考時，則以代數思維的解法較爲有利，例如「一個數乘以8再減去64，得到的答案是200，這個數字是多少？」其算法可單純順向思考，而列出算式：「X×8－64＝200」，算式中的「X」代表所要解答的數字，再利用等量公理或移項法則即可解出X的值。但學生並不一定只用代數思維來解文字題，如同上述的例子，「每枝鉛筆4元，買了5枝鉛筆後，還剩3元，問原有多少錢？」其算法亦可列式爲：「X－4×5＝3」，再解出「X」所代表的解。而「一個數乘以8再減去64，得到的答案是200，這個數字是多少？」的例題亦可以逆向思考列式爲（200－64）÷8，進而算出其解爲17。因此，以國小六年級的數學課程而言，處於算術解法過渡至代數解法的學習階段，學生的解題思維，或以代數思維，或以算術思維，尙未有固定的模式，且個人對題目的解讀及思考差異，亦影響其解題之思考形式，故本研究亦探討未知數位置，包括「起始未知」及「結果未知」對處於算術過渡至代數階段的國小六年級學生解題表現及其解題策略的運用與影響。

二、數學教學信念

教師的數學教學概念、觀點及信念顯著地影響課室教學行為及決策（Richardson, 1996; Thompson, 1984, 1992）。關於數學教學信念的研究，Raymond（1997）發現，個案教師的數學信念與數學教學實務具有一致性。Thompson與Thompson（1996）以及Swafford、Jones與Thornton（1997）的研究指出，教師對於數學概念所建立的知識基模，是影響其教學設計的潛在動力。教師如何教導學生學習數學，會受到個人在數學概念理解上的影響。van Dooren、Verschaffel與Onghena（2002）研究國小和國中職前教師算術和代數問題解決的策略和技能發現，國中職前教師喜歡使用代數解題，同時也期許學生能夠以代數解題，即使那是一個明顯可用算術解決的方法。而大部分的國小職前教師能因題目的需要而做適當的選擇，只有少部分小學職前教師傾向使用算術方法解題，以至於在較複雜的文字問題上容易解題失敗。

當教師教學信念與學生表現有落差時，意味著教師對學生表現的認知不足，因而於教學時，極有可能使用錯誤的表徵形式（forms of representations）（Shulman, 1986），而無法有效地幫助學生學習數學。Nathan與Koedinger（2000a）根據美國數學教育改革（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989）統整出教師在代數教學過程中應幫助學生建立及應用數學想法和方法的自信，進而建構出學生在數字、符號及程序上的理解，並據此將初等代數教學信念分為四大面向，包括：

（一）結果勝於過程：強調獲得正確答案的重要性，超過學生的推理過程，而有效的解題方法也許不能得到正確的答案。

（二）學生能發現有效的問題解決策略：此架構又分為教師教學、學生學習及學習內容三個構念：

1.教師應該鼓勵學生發現解題方法（教師教學）：指學生進入數學課室時，可能擁有依據的推理的模式，並且可自行想出有效的問題解決方法。

2.學生發現的解題方法是有效的（學生學習）：學生能學習並且發現有效的非正式策略來解決問題，其可能不同於學校所教的正式策略。

3.代數最好（學習內容）：此意見提出使用代數方程式是解決數學問題（代數型問題）最有效的方法。

（三）學生自己發明和其他解題方法表示學生知識裡的缺陷：指學生自己發明的非正式策略，例如猜測和檢驗、算術的方法、非使用代數符號或其他非正式的策略，表示其數學知識是較差的。

（四）符號優先的觀點：持此觀點者認爲，代數的教學應先教方程式或代數符號，然後再教文字問題；同時也認爲，文字問題是比符號方程式困難的。

教師的數學知識不僅影響他對於數學概念的解釋，而且對教材內容呈現的方式和師生互動模式也深具有影響（黃幸美，2000）。Simon（1995）認爲，在教學過程中，教師是內容和任務決策者。教師要時常思考著學生接下來可能會怎麼想，還要預測如何利用學生的想法，幫助學生發展預期達到的數學概念。爲了更仔細地描述教師的角色，Simon提出了「假設性學習路徑」（Hypothetical Learning Trajectory, HLT）這個概念。然而，真正的學習路徑並不可事先預知，個人的學習軌道亦可能有所不同，只不過，由於學習通常會沿著相似的路徑來進行，因此，Simon認爲，教師可以根據學生的學習目標、學習活動及學生的思考和學習等預期路徑，構築出一個假設性學習軌道。而真正在教室中教學進行的過程，便可以提供教師一個機會去發現學生實際的學習軌道和假設的學習軌道之間的符合程度。根據這些新的瞭解，可以形成修正過的假設性學習軌道，作爲接下來所進行課程的基礎，Simon稱這個過程是一個

「數學教學環」。

教學環的應用，仰賴教師對於學生學習路徑的瞭解，但是，研究上顯現，通常教師對學生表現的預期與學生真實表現的落差，將會降低教學的效能及容易造成學習的不理解。林宏仁（2003）的研究發現，教師在學生分數概念學習表現的教學評估與學生在分數概念學習表現上有所不同。林業泰（2004）的研究發現，教師對自己預測學生解題表現，最不具信心的問題原因受「教材不曾出現」、「試題複雜困難」與「教師本身欠缺數學知識」等三方面的影響。謝佳叡（2001）和黃淑華（2002）的研究發現，教師的數學教學信念與學生學習信念有某種程度之落差。Nathan與Koedinger（2000a, 2000b）的研究結果發現，高中教師對高一學生的解題信念與學生解代數文字及故事表徵的問題與符號試題表徵的成績表現，是互相矛盾的。Nathan與Petrosino（2003）更進一步在探討教師的背景與教學信念的關係時發現，具有較高數學領域知識的數學教師，傾向於過高估計學生解題的能力。這些落差不但會影響教師在教學過程中的重要決定，教學過程的序列也可能是之後學生產生迷思概念的重要來源（Resnick et al., 1989）。

由上述文獻可知，教師對學生解題表現之信念與學生實際解題表現存在著差距。也就是說，教師對學生真正的表現並非十分瞭解。這樣的狀況容易讓教師的教學決策較不利於學生學習。若以Simon（1995）「假設性學習路徑」的觀點來看，教師知識中「對學生知識的假設」將產生錯誤的估計，「關於學生學習特定數學內容的知識」也顯得不足，相對地，有可能影響其「對數學教與學的理論」，進而使其在課堂中使用的「數學活動和表徵的知識」對學生可能是不恰當的。

三、數學教師評估試題難易度研究

本研究另外一個探討的向度是教師如何預期學生的答題表現而決定試題的教學布題順序。對此，Nathan與Koedinger等人以三種試題表徵與未知數在式子的前後位置設計出六個試題組，並針對不同受試者進行一系列的研究。他們發現，美國在職教師和教師培育者均預測故事題對學生來說，比文字題和符號題困難（Nathan & Koedinger, 2000b），且在六個題目的排序相當一致。比較不同教育背景的職前教師研究，Nathan與Petrosino（2003）提出，具有數學專業的職前教師較容易認為符號題容易，此印證了所謂的專家盲點（expert blind）。另外，Nathan與Koedinger（2000a）另一個研究則是針對不同教學年齡層的教師（例如國小、國中、高中），說明教師複雜的排序結果。雖然所有教師在未知數位置和三種試題表徵上具一致性，均認為起始未知試題和故事題對學生來說比較困難，但六個試題混合評比，國小和高中老師的評比較為接近，係先考量數學結構，也就是未知數的位置，再考量三種試題表徵；認為最容易的是結果未知的符號題，而最困難的則是起始未知的符號題。而國中教師則是數學結構與三種試題表徵混合，認為結果未知的符號題最簡單，而最困難的包括起始未知的符號題、起始未知的文字題和結果未知的符號題。對此，本研究試圖針對國小教師，進一步區分不同教學布題序列的群集，並探討不同集群教師的教學信念與學生的表現之間的關聯性。

參、研究方法

一、研究工具

為了探究學生在故事、文字及符號表徵的解題表現，教師對不同題型的布題順序，以及自身存在的代數教學的信念，本研究修改Nathan與Koedinger

（2000a, 2000b）發展的「故事、文字、符號表徵測驗」及「教師代數教學信念問卷」，作爲主要的研究工具。

（一）故事、文字、符號表徵測驗

「故事、文字、符號表徵測驗」的架構主要參考Nathan與Koedinger（2000b）的問卷設計，此問卷設計包含兩個維度：第一個維度是未知數在題目中位置。Nathan與Koedinger根據代數與算術問題解決困難之文獻，提出未知數（unknown quantity）在問題中的位置及問題的語言表徵，並將未知數區分爲「結果未知」以及「起始未知」。所謂的「結果未知」，意指未知數即是試題裡數學事件或操作下的結果。例如：（35-10）/5=X式子中，爲了得到X答案，學生必須利用算術規則計算出左邊的算式。因爲「結果未知」的試題可直接利用算術的規則來得到未知數的答案，所以，這樣的問題可歸爲算術層次的問題（arithmetic-level problems）。而「起始未知」則是利用未知數來澄清解題所需的關係式，通常這樣的問題需要使用代數運算的策略或是監控算術計算方法，因此，這樣的問題可歸類爲代數層次的問題（algebra-level problems）。藉由決定未知數的順序，可以瞭解未知數對於學生在算術過渡至前代數期的解題表現的影響。

第二個維度是問題的不同表徵，包括故事、文字、符號三種不同類型的題目，進而探討三種不同試題表徵對學生解題表現的影響。表1則是參考Nathan與Koedinger的試題表徵問卷設計形式，選取了「算術平均數」主要數學內涵。考量這兩個維度及學生在學校情境中每次定期評量計算平均成績情境爲架構，發展出六個測驗題目。其中，P1、P2、P3爲「起始未知」試題，也就是所謂的前代數期的問題。而P4、P5、P6則是「結果未知」試題。在題目表徵上，P1和P4爲故事題；P2和P5爲文字題；P3和P6則爲符號題（方程式）。如此設計之用意在探討在等同數學結構情況下，操作變項爲「有真實情境的故

表 1 故事、文字、符號表徵測驗內容摘要表

數學結構（未知數）	表徵類型		
	故事題	文字題	符號題
起始未知	P1：大華第二次月考時，國語考了94分，數學考了96分，自然考了92分，社會要考多少分，才能使四科平均95分？	P2：把 94 加 96 再加 92，最後再加某個數後，得到這四個數的平均是 95，我最後加的數是多少？	P3：解 X：（94+96+92+X）÷ 4 ＝ 95
結果未知	P4：大華第二次月考時，四科平均95分。國語考了94分，數學考了96分，自然考了92分，請問社會考多少分？	P5：已知四個數的平均是95，其中三個是 94、96 和 92，第四個數是多少？	P6：解X：95×4－94－96－92＝X

註：試題表徵類型（3 層次）和未知值的位置（2 層次）。

事表徵」的數學應用問題，與「一般單純口語敘述的文字表徵」的數學應用題和「以數字、數學符號或文字符號等所列的方程式」三者不同數學表徵的情境下，學生的解題表現情況。

本研究採用Nathan與Koedinger（2000b）已發展的測驗試題，考量臺灣課程安排、臺灣學生的認知發展和文字理解等層面，我們進一步邀請數學教育專家、三位國小六年級教師，以及二位國中數學教師逐題審閱修正，一致同意本研究工具符合測驗操作的未知數位置及三種試題表徵，並符合國小六年級的數學學習內容，因此，符合專家效度與內容效度。我們亦從三所國中各抽取一班共87名學生爲受試樣本，請學生回答設計出的六個試題，各題難易度百分比分別爲P1＝45%、P2＝51%、P3＝55%、P4＝49%、P5＝53%、P6＝67%。

（二）教師代數教學信念問卷

代數教學信念係指教師在初等代數的教學歷程中，對教學方式、代數在

數學學習的觀點及教師如何教學（符號優先教學觀點或文字優先教學觀點）等方式所持有且信以爲真的觀點與信念。爲探討小六學生解題表現與國小教師對學生解文字題信念之差異，我們參考Nathan與Koedinger（2000a）所編「教師對學生非正式策略使用之信念問卷」，以文字題「教」與「學」信念爲本，從「學生能發明有效的問題解決策略」的教學信念抽取出「文字題教學觀」與「代數地位觀」，前者是有關解文字題教學，後者是有關於教學的內容。最後，考量教師在代數教學的特徵，而取其「符號優先教學觀點」，構成本研究問卷設計的基本架構。

問卷在這三個層面具體包含的因素成分分述於表2，原始問卷包含40題。問卷填答與記分，採Likert六點量表記分。填答的方式，由填答者根據自己所知覺的實際情形，從各選項選擇一個接近的答案作答，答案包括「非常同意」、「同意」、「有點同意」、「不太同意」「不同意」、「非常不同意」六個選項。

預試以桃園縣參加九年一貫數學領域研習之國中教師及六所國小高年級教授數學科之導師爲樣本，共150人。有效問卷爲125份（回收率83%），用以進行問卷信效度分析。效度方面，以試題之間的極端組比較、相關分析及因素分析（邱皓政，2002），作爲檢測與刪題的參考。當試題極端組t檢定未達顯著者、相關分析係數低於0.3及因素分析之因素負荷量低於.3時，優先刪改題目。然後進行因素分析，用以檢測問卷「文字題教學觀」、「代數地位觀」及「符號優先教學觀」是否爲問卷的主要因素。最後，問卷總題數爲19題。量化分析結果顯示，各因素層面的題目因素負荷量皆在.40以上。三個因素層面可解釋的變異量分別爲19.70、14.18及21.85。信度方面，採用Cronbach's α係數，分別分析三個因素層面與問卷整體的信度，以確定本問卷的內部一致性。得到之Cronbach α係數分別爲文字題教學觀.845、代數地位觀.760及符號領先觀.867，

表 2　代數教學信念問卷架構與題目設計一覽表

代數教學信念因素層面	因素成分	信念取向：認同	信念取向：不認同
文字題教學觀點	・教師對文字題教學看法 ・數學理解與應用的看法	・教師應直接教導明確的解題法 ・懂得如何應用解題法比理解問題重要	・教師應鼓勵學生的非正式策略 ・數學理解比懂得如何應用重要
代數地位觀點	・符號操作的看法 ・關鍵字法 ・正式策略	・代數是解代數問題的最佳工具 ・關鍵字的方法是學生解決故事型問題的理想模式 ・故事或文字試題表徵需轉譯為方程式 ・代數解題，一定是解故事型的代數問題所必需的	・代數只是解代數問題的一種方法 ・關鍵字不是解決故事型問題的理想模式 ・學生已有非正式解題策略 ・解故事型代數問題的方法有很多
符號優先教學觀點	・符號試題表徵較容易 ・方程式或符號優先教學 ・有意義的學習	・符號試題表徵較故事試題表徵容易 ・符號試題表徵較文字試題表徵容易 ・先教方程式或符號，再教故事問題 ・符號是有意義的程式	・故事試題表徵較符號試題表徵容易 ・文字試題表徵較符號試題表徵容易 ・先教故事試題表徵 ・故事問題比方程式更能吸引學生建構意義

量表整體之Cronbach α係數為.885，本問卷具有高度的內部一致性。最後，正式問卷內容詳見附件1。

二、研究對象及實施過程

參與本研究對象之包括國小六年級學生及國小六年級之數學授課教師。

其中，學生樣本從桃園縣兩所國小六年級學生，採叢集抽樣法抽取10個班級、共318名學生，請學生回答「故事、文字、符號表徵測驗」。施測兩所學校皆爲都會區學校，其中一所學校六年級班級數爲六班，另一所爲10班。此外，考量學生在解題時的習慣可能影響測驗結果（例如學生可能只寫前面的題目），故將六個試題（如表1），依表徵類別（代數、文字、情境）及未知數位置（「起始未知」和「結果未知」），排序成六個不同的版本。例如：原版試題排序爲P1、P2、P3、P4、P5、P6，試題表徵變動後之版本可爲P2、P3、P1、P5、P6、P4；未知數位置變動後之版本可爲P4、P5、P6、P1、P2、P3。並以班級爲單位，隨機將六個版本分派給學生作答。

教師部分，參與的教師爲桃園縣近三年有教授六年級之教師，採方便取樣法實施問卷填答。問卷內容包括：（一）六個試題難易度評分及教學布題活動排序；（二）教師代數教學信念問卷。問卷內容之試題難易度評分部分，請受測教師思考自己教授的學生（國小六年級），再判斷試題的難易程度來決定教學的布題順序。此外，考量教師對三種試題表徵名詞不熟悉，影響「代數教學信念問卷」的回答，問卷開頭提供三種試題表徵解釋（詳見附件一）。教師教學布題順序與其代數教學信念將與學生實際解題表現作比較，用以推測教師對於三種不同表徵試題的教學實踐，同時檢測與學生答題表現的一致性。問卷共寄（送）出386份，回收332份，回收率爲86.01%，扣除填答不完全者視爲無效問卷共16份，總計有效問卷316份，有效回收率爲81.86%。有效樣本教師來自約20所國小，其學校位置大多位於都會區或鄰近都會區，與接受施測學生的學校性質大致相同。規模在24班以下的學校擔任教師的有8位（2.5%），25～59班的有192位（60.8%），60班以上的有116位（36.7%）。

三、試題計分方式、編碼及統計分析

學生在「故事、文字、符號測驗」的答題表現計分採對、錯兩種。正確作答者每題1分、錯誤者0分。另外，也以紮根理論（grounded theory approach）（Strauss & Corbin, 1998）進一步分析學生各種解題策略，用以深入瞭解影響學生解題表現的因素。本研究由第一作者進行初始分析，先不設定編碼系統，由學生答題內容由下往上（bottom-up）逐一形成各種不同的解題類型。之後，再由所有作者討論釐清如何依據算術思維和代數思維的意涵來架構出最後的編碼系統。例如，學生如何使用算術思維及代數思維進行解題，以及兩種思維過度之間是否有另類的解題策略。教師代數教學信念問卷計分方式由「非常同意」到「非常不同意」，分別以6、5、4、3、2、1的分數代表。學生在三種試題的表現、教師預估學生表現而決定的布題順序及其代數教學信念經過計分、編碼之後，進一步採用相關統計方法進行分析研究。

肆、研究分析結果

研究分析結果包含三部分，第一部分依據研究問題一，回答臺灣六年級學生在三種試題表徵的解題表現。第二部分，以研究問題二爲依據，呈現國小數學教師決定三類試題的布題順序及教學信念。第三部分則是回應研究問題三，進一步檢驗學生解題表現與教師布題順序及教學信念的一致性。

一、國小六年級學生在三種試題表徵的解題表現

（一）學生三種不同表徵試題的解題表現

表3呈現受試學生在「故事、文字、符號表徵測驗」答題表現，其中可看出學生在「結果未知」的符號題表現最好（76.4%），其次是「起始未知」的

表 3　學生在 P1～P6 答題正確人數和百分比

題號		答錯		答對	
		人數	百分比	人數	百分比
P1	起始未知—故事表徵	101	31.8%	217	68.2%
P2	起始未知—文字表徵	96	30.2%	222	69.8%
P3	起始未知—符號表徵	85	26.7%	233	73.3%
P4	結果未知—故事表徵	89	28.0%	229	72.0%
P5	結果未知—文字表徵	96	30.2%	222	69.8%
P6	結果未知—符號表徵	75	23.6%	243	76.4%

符號題，「結果未知」故事題排名第三；「結果未知」與「起始未知」的文字題（69.8%）則排名第四；學生在「起使未知」的故事題表現最差。大致上來說，學生在「結果未知」的表現比「起始未知」試題的表現好。在三種試題表徵中，符號題的表現最好、文字題居次，故事題的表現最差。

表4則是進一步利用統計方法檢驗學生的表現。由表可知，學生在不同數學結構（「起始未知」與「結果未知」）的表現上並沒有達到顯著差異（$t=1.441, p>.05$），但在不同數學表徵類型的解題表現上則存在著顯著差異。尤其符號題的解題表現顯著優於故事題（$t=2.331, p<.05$）及文字題（$t=2.568, p<.05$）。而故事題與文字題之間，學生的表現則未達顯著差異（$t=.196, p>.05$）。

利用紮根理論，我們進一步分析學生在「故事、文字、符號表徵測驗」的不同解題策略，主要區分出三種解題類別（前三類型），包括「算術列式＋算術解法」、「代數列式＋算術解法」，以及「代數列式＋代數解法」。而學生解題的錯誤則可歸類出四類（後四類型），包括等式的誤用、未加括號、列式錯誤及沒有計算程序或空白等。三種解題類型及四種錯誤類型的學生範例敘述如下：

表 4　學生解題表現成對樣本 t 考驗摘要表（n＝318）

	平均數	標準差	平均數的標準誤	t	自由度
結果未知—起始未知	.069	.856	.048	1.441	317
故事表徵—文字表徵	.006	.573	.032	.196	317
符號表徵—故事表徵	.094	.722	.040	2.331*	317
符號表徵—文字表徵	.101	.699	.039	2.568*	317

*p<.05

1.算術列式＋算術解法：表示此題學生之解題法以算術方法列式且以算術方法解題。

例如：P1「起始未知」—故事題

95×4=380

380－（94+96+92）= 98

2.代數列式＋算術解法：表示此題學生之解題法以代數方法列式，但計算程序上以算術的思考方式解題。

例如：P1「起始未知」—故事題

（94+96+92+X）÷ 4 ＝ 95

95×4＝380

380－94－96－92 ＝ 98

3.代數列式＋代數解法：表示此題學生之解題法以代數方法列式且以代數方法解題。

例如：（94+96+92+X）÷ 4 ＝ 95

（94+96+92+X）=380

X=380－94－96－92

=98

4.不完整的算術或代數等式運算：學生在計算過程中，不瞭解「＝」號的等價性。

例如：95×4－94－96－92 ＝ 380－94 ＝ 286－96＝190－92 ＝ 98

其中第一個「＝」號之後應該為「380－94－96－92」，第二個「＝」之後則應為「286－96－92」。

5.算術或代數解法未加括號。

例如：94+96+92+X÷4 ＝ 95……（1）

94+96+92+X＝95×4 ……（2）

X＝380－282＝98 ……（3）

其中第1.式應該為（94+96+92+X）÷4 ＝ 95。

6.算術或代數列式錯誤則是發生在學生將故事情境或文字敘述轉換為數學式子過程中所產生的錯誤。

7.其他：包括沒有計算程序或空白等。

表5為學生解題策略的統計分析，顯示出：1.學生會因試題表徵的不同，而使用不同的解題策略。由百分比可以看出學生最主要的三種解題策略為「算術列式＋算術解法」、「代數列式＋算術解法」及「代數列式＋代數解法」。這三種試題，無論是「起始未知」還是「結果未知」，採用算術解法解題的學生百分比都高於採用代數解法的學生。這表示，即使學生在符號題的解題答對率比其他兩種試題高，但是，仍有相當高比率的學生還是以算術思維來解題。

2.在故事題和文字題使用代數策略解題的學生，有相當比例未能正確地使用括號（例如P1：11.6%的學生未在代數列式時加上括號），瞭解括號在代數式子裡的意義。

表 5　學生之解題策略與答對率次數分配表

	P1		P2		P3		P4		P5		P6	
	人數（%）	答對（%）	人數（%）	答對（%）	人數（%）	答對（%）	人數（%）	答對（%）	人數（%）	答對（%）	人數（%）	答對（%）
（1）算術列式＋算術解法	116（36.5%）*	105（90.5%）**	96（30.2%）	86（89.6%）	18（5.7%）	16（88.9%）	116（36.5%）	104（89.7%）	142（39%）	107（75.3%）	241（75.8%）	199（82.6%）
（2）代數列式＋算術解法	33（10.4%）	31（96.7%）	42（13.2%）	37（88.1%）	125（39.3%）	102（81.6%）	42（13.2%）	33（78.6%）	31（9.7%）	25（80.6%）	0（0%）	0（0%）
（3）代數列式＋代數解法	60（18.9%）	45（75%）	77（24.2%）	64（83.1%）	126（39.6%）	101（80.2%）	68（21.4%）	54（79.4%）	66（20.8%）	55（83.3%）	46（14.5%）	39（84.8%）
（4）代數解法未加括號	37（11.6%）	25（67.6%）	30（9.4%）	23（76.7%）	6（1.9%）	4（66.7%）	25（7.9%）	21（84%）	28（8.8%）	19（67.9%）	0（0%）	0（0%）
（5）算術或代數列式錯誤	30（9.5%）	2（6.7%）	37（11.6%）	1（2.7%）	5（1.5%）	0（0%）	28（8.9%）	2（71.4%）	23（7.3%）	3（13%）	2（0.6%）	0（0%）
（6）不完整的代數等式運算	4（1.3%）	3（75%）	8（2.5%）	5（62.5%）	10（3.1%）	8（80%）	6（1.9%）	6（100%）	5（1.6%）	5（100%）	2（0.6%）	2（100%）
（7）其他解題策略（含空白無算式）	38（11.9%）	6（15.8%）	28（8.8%）	6（21.4%）	28（8.8%）	2（7.1%）	33（10.3%）	9（27.2%）	23（7.2%）	8（34.8%）	39（12.2%）	3（7.7%）
總數	318（100%）	217（68.2%）	318（100%）	222（69.8%）	318（100%）	233（73.3%）	318（100%）	229（72%）	318（100%）	222（69.8%）	318（100%）	243（76.4%）

註：*括弧內數字表示使用此一解題策略學生占全體學生的百分比。
　　**括弧內數字表示在此一解題策略之下，答題正確學生數的百分比。

3.分析資料顯示，有相當比例的學生在轉譯故事題和文字題爲代數或是算術式子時，容易發生錯誤。

4.另一個常見的錯誤是學生不正確地使用等號，將等號當成運算的歷程而非是代數式子等價的關係。

這些分析可以推論出學生雖然在符號題的答對率較好，但是有非常大部分的學生仍是以算術思維來解題，且學生的代數思維還未臻成熟。

爲了證實這個論點，我們進一步分析學生在三種解題策略──「算術列式＋算術解法」、「代數列式＋算術解法」以及「代數列式＋代數解法」的答題表現。從表6可以看出，以單因子ANOVA分析六個題目之後，在「起始未知」P1及P2兩題上，三種解題策略分析的F值達顯著差異 （P1：F（278, 2）=5.081，p<.01；P2：F（288, 2）=5.192，p<.01）。其餘四個題目統計檢驗則無差異。事後比較發現，在P1試題上，學生使用「代數列式算術解法」之解題答對率顯著優於「代數解法」及算術解法。另在P2試題上，學生使用「代數列式算術解法」也顯著優於「代數解法」。這個分析結果顯示，雖然學生使用代數列式，但算術解題能力還是優於代數解題。換句話說，學生的代數思維發展仍有進步的空間。

二、國小數學教師代數教學信念及其教學布題

（一）教師代數教學信念

教師代數教學信念的分析，則是依據受試教師在「代數教學信念問卷」的回答。如表7所示，國小教師在代數教學信念問卷之總平均得分爲4.41分，明顯高於平均值3.5分。由問卷分項來看，「文字題教學觀」平均爲3.99分；「代數地位觀」平均爲4.63分；「符號優先教學觀」的平均最高，爲4.70分。顯示教師在「文字題教學觀」上較認同文字題的教學應直接教導正確的解題法或先熟

表 6　學生解題策略對解題表現之影響差異分析表

題項	解題策略	人數	平均數	標準差	F 值	事後比較
起始未知故事表徵（P1）	a. 算術列式算術解法	142[a]	.75	.432	5.081**	b＞a b＞c
	b. 代數列式算術解法	46	.91	.285		
	c. 代數解法	90	.67	.474		
起始未知文字表徵（P2）	a. 算術列式算術解法	112	.78	.418	5.192**	b＞c
	b. 代數列式算術解法	54	.87	.339		
	c. 代數解法	122	.66	.477		

註：a：解題策略分析的依據為測驗卷上學生的列式方法及解題歷程。因此，各策略學生人數與表 6 呈現有所出入。
$^{**}p<.01$

表 7　教師在代數教學信念總分及平均

	分量表總分	題數	平均
文字題教學觀	27.93	7	3.99
代數地位觀	27.78	6	4.63
符號優先教學觀	28.17	6	4.70
量表總分	83.88	19	4.41

練符號操作的過程；國小教師在「代數地位觀」偏向贊同代數方程式是解決語詞（故事或文字）表徵文字題最有效的方法；「符號優先教學觀」則認爲符號題較故事題或文字題容易。

（二）教師教學布題之結果分析

教師教學布題分析則是根據教師問卷內教師針對六個試題難易度評分及教學布題活動之排序。分析方法以階層集群（hierarchical cluster）中的Ward’s

法進行分類。對應六個試題的數學結構（「起始未知」與「結果未知」）和表徵類別（情境、文字、符號），在參考階層集群分析之樹狀圖之後，將分類集群數設定爲4，並經由區別分析（x^2=165.373, p<.01）確認分類的適切性。茲將集群的共同特徵描述如下：

1.第一集群（118人）：先考慮數學結構再考慮試題表徵。數學結構爲「結果未知」的三個試題優先布題，其中符號題最爲優先，其次文字題，最後爲故事題。之後，才以「起始未知」的三個試題布題，且試題表徵的順序大多與「結果未知」題相同。

2.第二集群（64人）：與第一集群相似，以數學結構爲「結果未知」的題型優先布題，但三種表徵間則以故事題最爲優先，其次文字題，最後爲符號題。待「結果未知」的題型先布題後，才以「起始未知」的題型布題，且順序與「起始未知」題相同。

3.第三集群（67人）：先考慮試題表徵再考慮數學結構，以符號題最爲優先布題，其中再以「結果未知」然後「起始未知」布題；待符號題先布題後，其次是文字題，最後是故事題，且數學結構的順序大多與符號題相同。

4.第四集群（67人）：試題表徵和數學結構是交叉影響的，首先以「結果未知」符號題優先布題，其次爲「起始未知」符號題，接著是「結果未知」文字題，之後爲「結果未知」故事題，再來是「起始未知」文字題，最後則爲「起始未知」故事題。

從上述的分析結果可以得到二點：第一，所有受測教師中，約有80%的教師（第一、三、四集群）在三種試題布題時，會先從符號題開始教學，然後是文字題，最後才是故事題。只有大約20%的教師會先從故事題開始教學。第二，有37%的教師之布題特徵是先考慮數學結構再考慮試題表徵；其餘63%的教師則大約平均分布在另外三種布題特徵的集群中。

（三）教學布題排序集群對代數教學信念差異情形之結果分析

由表8可看出，不同教學布題排序之國小教師代數教學信念有顯著差異。尤其第二集群的教師（教學考慮故事題優先）顯著不同於其他三群的教師。以總問卷來看，第二集群的教師顯著低於其他三群的教師。細部檢驗各分項也得到相似的結果。在「文字題教學觀」，第二集群的教師得分也顯著低於第一和第三集群的教師，亦即第一及第三集群的國小教師比第二集群的國小教師更認同「文字題的教學應直接教導正確的解題法或先熟練符號操作的過程」。在「符號優先教學觀」因素層面上，第二集群的教師得分顯著低於其他三個集群的教師，亦即第一集群、第三集群及第四集群的國小教師比第二集群的國小教師更認同「符號題較故事題或文字題簡單」的觀點。只有「代數地位觀」分項，四個集群教師之間無顯著差異。

上述之研究結果呈現，教學布題順序不同的國小教師其代數教學教學信念有顯著差異存在，亦即，採用不同教學布題順序的教師其代數教學信念亦有所不同。尤其是布題以故事表徵試題優先的教師（第二群集），在文字題教學觀和符號優先教學觀的量表上，與其他群教師顯著不同。

三、教師布題順序與代數教學信念及學生解題表現的一致性檢驗

（一）教師對試題難易度的評分

我們進一步藉由教師的布題順序，分析其對六個試題難易度的評分是否有差異。表9爲單因子變異數分析結果呈現達顯著差異（F（316, 5）＝80.381，p＜.001），也就是國小數學教師認爲這六個試題對學生來說有難易之別。事後分析顯示，國小教師認爲這六個試題由難到易依序爲：「起始未知」故事題（P1）及「起始未知」文字題（P2）最難，且二者無顯著差異，而與其他題項均達到顯著差異；其次爲「起始未知」符號題（P3）、「結果未知」

表 8　不同教學布題排序國小教師代數教學信念之單因子變異數分析摘要表

因素層面	布題排序集群	人數	平均數	每題平均得分	標準差	F 值	事後比較
文字題教學觀	第一集群	118	29.04	4.15	5.28	7.485***	第一＞第二
	第二集群	64	25.33	3.62	7.22		
	第三集群	67	29.42	4.20	4.80		第三＞第二
	第四集群	67	26.97	3.85	6.63		
代數地位觀	第一集群	118	27.86	4.64	4.50	1.913	N.S
	第二集群	64	26.91	4.48	4.98		
	第三集群	67	28.72	4.79	3.84		
	第四集群	67	27.51	4.58	4.38		
符號優先教學觀	第一集群	118	28.81	4.12	4.23	10.834***	第一＞第二
	第二集群	64	25.14	3.59	6.41		
	第三集群	67	29.76	4.25	3.62		第三＞第二
	第四集群	67	28.34	4.05	5.77		第四＞第二
量表總分	第一集群	118	85.72	4.29	11.16	9.841***	第一＞第二
	第二集群	64	77.38	3.87	15.13		
	第三集群	67	87.90	4.39	9.74		第三＞第二
	第四集群	67	82.82	4.14	12.19		第四＞第二

註：N.S 表無顯著差異。
*** $p < .001$

故事題（P4）及「結果未知」文字題（P5），三者之間無顯著差異，與其他題項均達顯著差異；最後爲「結果未知」符號題（P6），與其他各題項均達到顯

表 9　教師之試題難易度評分單因子變異數分析摘要表

題項	個數	平均數	標準差	F 值	事後比較 $p<.05$
P1	316	4.31	1.509	80.381***	P1＞P3＞P6
P2	316	4.01	1.323		P1＞P4＞P6
P3	316	3.35	1.631		P1＞P5＞P6
P4	316	3.34	1.471		P2＞P3＞P6
P5	316	3.09	1.247		P2＞P4＞P6
P6	316	2.19	1.616		P2＞P5＞P6

*** $p<.001$

著差異。由此可知，在國小教師對試題難易度排序的信念裡，「起始未知」試題難度明顯高於「結果未知」試題，而無論是「起始未知」或「結果未知」，國小教師均認爲符號題較簡單，顯示其具有符號優先教學之觀點。

（二）教師試題難易度評分與學生解題表現之差異比較

表10則進一步呈現教師對學生的試題難易度的評分及學生實際解題表現的分析。由表可知，學生解題表現最佳（P6：「結果未知」符號題）和最差（P1：「起始未知」故事題）以及第三順位（P4：「結果未知」故事題）三題，教師的評估順序與學生解題表現完全相同。其他各題則略有出入，但以P2（「起始未知」文字題）的評估較爲相近，而P3（「起始未知」符號題）和P5的評估則較差。整體而言，國小教師對學生解測驗的六個試題難易度評分與學生實際解題表現比較，在最難與最易的試題上相同，其他的試題則稍有差異。

（三）不同教學布題順序的教師在試題難易度評分與學生實際解題表現之差異

我們進一步分析不同教學布題順序集群之教師，欲瞭解不同集群教師是

表 10　教師對學生的試題難易度評分與學生解題表現分析表

數學結構	表徵類型	學生解題表現（n=318）		教師難易度評分（n=316）	
		平均	排序	平均	排序
起始未知	故事表徵（P1）	.68	6	4.31	6
	文字表徵（P2）	.70	4	4.01	5
	符號表徵（P3）	.73	2	3.35	4
結果未知	故事表徵（P4）	.72	3	3.34	3
	文字表徵（P5）	.70	4	3.09	2
	符號表徵（P6）	.76	1	2.19	1

註：1. 排序 1 分表示最容易，6 分表示最難，餘類推。
2. 學生的解題表現平均愈高，表示題目較容易；教師難易度評分的平均愈高表示題目較難。

否在試題難易度評分與學生實際解題表現的比較上存在差異。表11呈現第三集群的國小教師有四項排序與學生解題表現相同，第一集群及第四集群的國小教師則有三項排序與學生解題表現相同，且此三者能有效地掌握學生解題表現中最簡單及最困難的題型；而第二集群的國小教師則在六個題型上均無法有效地掌握學生的解題表現。由上述分析結果可知，國小教師對學生解題表現的評估最為準確的是第三集群的教師，是以符號題優先布題，其次為文字題，最後為故事題；在數學結構上則以「結果未知」試題先於「起始未知」試題；而對學生解題表現的評估最差的，則是第二集群教師，布題以「結果未知」題型優先；三種試題表徵則以故事題最為優先，其次文字題，最後為符號題，待「結果未知」的題型布題後，才以「起始未知」的題型布題。

伍、討論

針對第一個研究問題，分析結果顯示國小六年級學生在三種試題表徵的

表 11　不同集群教師教學布題順序與學生解題表現分析表

未知數位置	表徵類型	學生解題表現	教師難易度評分			
			第一集群	第二集群	第三集群	第四集群
		平均（排序）	平均（排序）	平均（排序）	平均（排序）	平均（排序）
起始未知	故事表徵（P1）	.68（6）	4.68（6）	3.58（4）	4.84（6）	3.82（6）
	文字表徵（P2）	.70（4）	4.25（5）	3.63（5）	4.28（4）	3.67（5）
	符號表徵（P3）	.73（2）	3.81（4）	4.02（6）	2.00（2）	3.25（2）
結果未知	故事表徵（4）	.72（3）	2.95（3）	2.70（1）	4.40（5）	3.60（4）
	文字表徵（P5）	.70（4）	2.78（2）	3.02（2）	3.48（3）	3.31（3）
	符號表徵（P6）	.76（1）	1.84（1）	3.17（1）	1.70（1）	2.36（1）

表現，符號題的答對率顯著高於故事題及文字題，而故事題和文字題之間則無顯著差異。此結果呼應之前臺灣本土性的研究（黃明瑩，2000），但和Nathan與Keodinger的研究結果相反（Koedinger & Nathan, 2004; Nathan & Koedinger, 2000a, 2000b）。Koedinger與Nathan研究發現，即使選修過代數課程的高中學生在故事題和文字題的表現上都顯著高於符號題。

進一步分析解題策略發現，雖然國小六年級學生在符號題表現較佳，但是，採用算術思維解題學生比例高於採用代數思維解題的學生，且以算術策略解題的答對率明顯高於代數策略。此結果顯示，學生代數思維的發展還是有其限制。以Koedinger與Nathan（2004）的三大假設解釋，臺灣學生的答題表現較符合符號促成假設（symbolic facilitation hypothesis），也就是說，學生在符號題答對率較高，是因符號題能避免文字理解及題目條件轉換成數學式子的認知負荷，而非學生代數符號運算能力發展得比較好。

支持此一論點的另一證據是學生解題策略分析呈現的代數迷思概念，包括學生以代數策略解題時，並未意識到括號在式子中代表的意義，進而省略括號。另一迷思概念則是將等號當成是運算的結果，而非代數式子等價意義。換

句話說，學生仍以程序性（procedural）算術思維來處理代數符號問題，將代數符號當作數字處理（Kieran, 1992），而未從結構性（structural）來思考括號及等號對於代數式子結構性的意義與影響。因此，六年級學生雖然能正確解出符號題，但代數思維的發展還是有其侷限。學生既未建構出「去情境化」的心智表徵（Piaget & Inhelder, 1967），也缺乏對抽象符號操作背後意義的理解。這樣的學習狀態將不利於發展多個代數操作規則濃縮成單一規則，具體化（reification）成抽象代數意義（Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994）。

就第二研究問題探討國小數學教師代數教學信念，問卷分析結果顯示，國小教師普遍存在代數導向的教學信念。在「文字題教學觀」上，較認同文字題的教學應直接教導正確的解題法或先熟練符號操作的過程。在「代數地位觀」上，較贊同代數方程式是解決語詞（故事或文字）表徵文字題最有效的方法。在「符號優先教學觀」上，則認為符號題較故事題或文字題容易，所以，教學應先教學生解符號題。

就第三研究問題探討教師布題順序及教學信念與學生解題表現的一致性。雖然本研究方法不是直接研究施測學生的代數解題表現與該班級數學教師的代數教學信念，而是採用大樣本的問卷瞭解國小數學教師的布題順序及代數教學思維，進而比較教師對三種表徵試題的布題順序與學生答題表現。研究結果顯示，臺灣教師無法準確地預估學生的答題表現。教師除了能較準確地預估最困難與最容易的題目外，介於此二者間的題目，教師的預期及布題順序與實際學生的答題表現有落差存在。另一個重要的發現則是代數教學信念偏向非符號優先教學觀及非直接示範解答的教學觀教師，其布題順序與學生答題表現的落差最大。

陸、結論與建議

根據臺灣六年級學生在三種試題表徵的解題表現（符號題表現優於故事題和文字題），筆者對代數課程之安排提出進一步的疑慮。西方數學教育改革不斷呼應代數學習應該從情境出發，培養學生推論情境中資訊間之關係，逐漸地將關係抽象化，進而型塑出學生代數思維（Kieran, 1992; NCTM, 1989, 2000）。但研究顯示，學生在代數發展上仍有其不足之處。即使高中生選修過代數課程，解題還是偏向算術思維，且代數運算的能力還是不佳（Koedinger & Nathan, 2004）。而本研究顯示，在東方代數教育的觀點下，即使學生在符號題的表現較佳，代數思維的發展亦有其侷限。從國小課程安排來看，依據九年一貫課程數學領域綱要（教育部，2003）強調培養學生在現實情境之下，能推論不同未知數之間的關係，並逐漸將此關係一般化。坊間審核通過的國小教科書應符合其精神，但是，國中課程則是從文字符號切入，直接進行抽象代數的學習。例如國一初始之代數學習是從文字題開始，進而以大量的符號表徵練習，然後才是代數符號運算在情境的應用題。

從本研究中學生解題表現來看，在國小階段幫助學生從情境建構關係經驗仍顯不足，之後又立刻接著以抽象符號操作爲主的國中課程，學生在國中發生代數學習困難，是可預期的。對此，值得探討的接續研究應包含：一、全面性地檢測臺灣國中小的代數課程如何鷹架學生從情境的算術思維進展到抽象的代數思維。二、實際分析國小課室教師如何提供學生從情境中建構出抽象關係的學習機會；是否教師本身的符號優先教學觀，剝奪了學生建構代數抽象意義的機會。三、考量國際數學評比上臺灣學生的代數表現明顯高於西方國家（例如美國、英國）（Mullis, Martin, & Foy, 2008; Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2004），研究方向應放在具體情境關係建立

轉換到抽象符號操作，進一步分析東方與西方代數課程設計與教學。

針對臺灣國小教師代數導向的教學信念來說，促成此教學觀點與信念的原因有許多（例如教科書編排的影響、教師個人數學學習經驗及學生學習反應的察覺等），需進一步釐清。但此代數導向的教學信念，與國內外數學教育課程改革提出的培養學生從情境中瞭解代數意義之觀點相背馳（教育部，2003；NCTM, 1989, 2000）。尤其教學信念對教學行為深具影響性（方吉正，1998；Clark & Peterson, 1986; Thompson, 1984），教師代數教學信念如何影響學生代數學習不容小覷。從分析數據顯示，國小課室的代數教學可能偏向規則熟練與機械式的運算，教師可能將學生能計算符號題當成學生代數思維發展成熟。然而，獨尊代數策略解題且偏重代數規則熟識的教學方式，會造成學生代數意義的不理解且不利於抽象代數思維的發展。

就臺灣教師無法準確地預估學生的答題表現來看，教師錯誤預估學生的表現可能源自於本身教學內容知識，亦可能源自於教師的學科內容知識，或受到數學教學的課程和專業標準，以及教課書的架構和內容的影響（Nathan & Koedinger, 2000a, 2000b）。若單看解題表現，臺灣學生在符號題之表現顯著優於文字題和故事題，這似乎意味著持有符號優先教學觀點的教師與學生表現比較一致。但若深入分析學生的解題策略和錯誤類型，在學生代數思維未發展完成前，非符號優先教學觀點的教師較能提供學生建構代數意義的學習機會（opportunity to learn）。對此，進一步的研究問題應是：一、對大部分（80%）持有符號優先教學觀點的數學教師，師培教育與專業發展如何改變其代數教學觀點與信念；二、對少部分（20%）非符號優先教學觀點的教師，他們在課室裡如何能夠藉由情境來診斷及澄清學生的代數學習困難（例如等式意義不清），以幫助學生建構完整的代數意義。這些研究問題值得進一步探究。

參考文獻

方吉正（1998）。教師信念研究之回顧與整合——六種研究取向。**教育資料與研究，20**，36-44。

[Fung, J.-Z. (1998). Review and synthesis on teacher belief-Six research approaches. *Journal of Educational Resources and Research, 20*, 36-44.]

林宏仁（2003）。**國小教師數學教學信念及其教學評估之研究：以高年級學生分數概念學習表現為例**。屏東縣：國立屏東教育大學。

[Lin, H.-R. (2003). *Elementary school teachers' teaching beliefs and their teaching evaluation: Using upper graders' learning of fraction concepts as an example.* PingTung, Taiwan: National Pingtung University of Education.]

林業泰（2004）。**國小教師對高年級學生分數概念的瞭解**。臺北市：國立臺北教育大學。

[Lin, Y.-T. (2004). *Elementary school teachers' understanding of upper graders' performance on fraction concepts.* Taipei, Taiwan: National Taipei University of Education.]

邱皓政（2002）。**量化研究與統計分析——SPSS中文視窗版資料分析範例解析**。臺北市：五南。

[Chou, H.-Z. (2002). *Quantitative research and statistics analysis-SPSS Chinese windows data analysis examples*. Taipei, Taiwan: Wu-Nan.]

教育部（2003）。**九年一貫課程數學領域綱要**。臺北市：作者。

[Ministry of Education (2003). *Grade 1-9 curriculum guidelines*. Taipei, Taiwan: Author.]

黃幸美（2000）。教師的數學教學知識與其對兒童數學知識認知之探討。**教育與心理研究季刊，23**（1），73-98。

[Huang, H.-M. (2000). Teachers' mathematical knowledge for teachign and its influence on children's cognition of mathematics knowledge. *Education & Psyhcology Research, 23*(1), 73-98.]

黃明瑩（2000）。**探討幾何問題中的情境及相關變因對解題影響之研究**。臺北市：國立臺灣師範大學。

[Huang, M.-I. (2000). *Investigating the influence of problem contexts and related factors on students' problem solving performance*. Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.]

黃淑華（2002）。**高中生複數學習歷程中之數學思維研究**。臺北市：國立臺灣師範大學。

[Huang, S.-H. (2002). *High school students' mathematical thinking in learning complex numbers*. Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.]

謝佳叡（2001）。**國中生配方法學習歷程中之數學思維研究**。臺北市：國立臺灣師範大學。

[Hsieh, C.-J. (2001). *Middle school students' mathematical thinking in learning completing square methods*. Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.]

Ball, D. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the learning of Mathematics, 8*, 40-48.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 194-222.

Clark, C. M., & Peterson, P. L. (1986). Teachers' thought processes. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 255-296). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1989). The early learning algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 707-762). Charlottee, NC: Information Age.

Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of The Learning Science, 13*(2), 129-164.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learnign and problem solving. In C. Lanvier (Ed.), *Problems of presentation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ:

Lawrence Erlbaum.

Lin, F. L., & Tsao, L. C. (1999). Exam math re-examined. In C. Hoyles, C. Morgan & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking mathematics curriculum* (pp. 228-239). London: Falmer Press.

Lin, F. L., & Yang, K. L. (2005). Distinctive characteristics of mathematical thinking in non-modelling friendly environment. *Teaching Mathematics and its Application, 24*(2-3), 97-106.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W. H. Freeman and Company.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000a). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction, 18*(2), 209-237.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000b). Teacher's and researcher's beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 168-190.

Nathan, M. J., & Petrosino, A. (2003). Expert blind spot among preservice teachers. *American Educational Research Journal, 40*(4), 905-933.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2004). *Learning for tomorrow's world-First results from PISA 2003*. Paris: Author.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. New York: The Norton Library.

Raymond, M. A. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 577-601.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for*

Research in Mathematics Education, 20(1), 8-27.

Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. In J. Sikula (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 102-119). New York: Simon & Schuster.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Shroyer, J. (1978, March). *Critical moments in the teaching of mathematics*. Paper presented at the The annual meeting of the American Educational Research Association, Toronto, Canada.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Sternberg, R. J. (1994). *Thinking and problem solving*. New York: Academic Press.

Sternberg, R. J. (2003). *Cognitive psychology*. Belmont, CA: Wadsworth/Thomson Learning.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theorey*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Swafford, J. O., Jones, G. A., & Thornton, C. A. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(4), 467-483.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 105-127.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Thompson, A., & Thompson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, part II: Mathematical knoweldge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education,* *27*(1), 2-24.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 165-208.

van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 63-75.

van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). Impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 319-351.

附件一　教師代數教學信念問卷

名詞解釋：

「故事題」：含有生活情境的數學應用問題稱爲故事型問題，例如P1、P4試題。

「文字題」：不含生活情境、純粹以語詞表達的數學應用問題稱爲文字型問題，例如P2、P5試題。

「符號題」：將數字、數學符號及文字符號所列的運算式或方程式稱爲符號或方程式問題，例如P3、P6試題。

題號	題目內容	非常同意	同意	有點同意	有點不同意	不同意	非常不同意
	【文字題教學觀】						
01.	與學生自己發現的解題法相比，直接教導明確的解題法是較有效的教學。	□	□	□	□	□	□
02.	對於剛學習怎樣利用代數解故事題的學生，直接教導明確的解題法是必要的。	□	□	□	□	□	□
03.	知道如何解一個數學方程式，比理解爲何使用這個方程式重要。	□	□	□	□	□	□
04.	處理複雜的故事題時，需要教導學生明確的解題法。	□	□	□	□	□	□
05.	在學生嘗試解題之前，教師應該先示範正確的解題法。	□	□	□	□	□	□
06.	學生要先熟練符號操作的過程，再學解故事題的技能。	□	□	□	□	□	□
07.	學生要先學列方程式，再學解文字型的技能。	□	□	□	□	□	□
	【代數地位觀】						
08.	代數方程式是解故事題最有效的方法。	□	□	□	□	□	□
09.	解決一個複雜的故事題最有效的方法，就是把相關的訊息轉譯成代數方程式。	□	□	□	□	□	□
10.	解代數題時，熟練符號方程式的操作是必要的。	□	□	□	□	□	□
11.	解故事題時，將問題訊息轉譯成方程式是一個必要的步驟。	□	□	□	□	□	□

題號	題目內容	非常同意	同意	有點同意	有點不同意	不同意	非常不同意
12.	將問題訊息轉譯成方程式是解故事題最好的方法。	□	□	□	□	□	□
13.	解故事題必備的技能是代數方程式的解法。	□	□	□	□	□	□
【符號領先觀】							
14.	故事題比相同的數學方程式困難。	□	□	□	□	□	□
15.	相同的數學問題，文字題比符號題困難。	□	□	□	□	□	□
16.	用文字呈現的數學問題容易把學生弄糊塗。	□	□	□	□	□	□
17.	以數學符號呈現的問題比文字呈現的問題簡單易懂。	□	□	□	□	□	□
18.	故事題使學生害怕。	□	□	□	□	□	□
19.	相同的數學問題，以符號呈現的比故事呈現的更容易。	□	□	□	□	□	□