

本文章已註冊DOI數位物件識別碼

▶ 國小幾何教材內容之比較：以臺灣與芬蘭為例

The Content Analysis of Geometry Material in the Elementary Mathematic Textbooks of Taiwan and Finland

doi:10.6151/CERQ.2012.2003.02

當代教育研究季刊, 20(3), 2012

Contemporary Educational Research Quarterly, 20(3), 2012

作者/Author：徐偉民(Wei-Min Hsu);董修齊(Hsiu-Chi Tung)

頁數/Page：39-86

出版日期/Publication Date：2012/09

引用本篇文獻時，請提供DOI資訊，並透過DOI永久網址取得最正確的書目資訊。

To cite this Article, please include the DOI name in your reference data.

請使用本篇文獻DOI永久網址進行連結:

To link to this Article:

<http://dx.doi.org/10.6151/CERQ.2012.2003.02>



DOI Enhanced

DOI是數位物件識別碼（Digital Object Identifier, DOI）的簡稱，是這篇文章在網路上的唯一識別碼，用於永久連結及引用該篇文章。

若想得知更多DOI使用資訊，

請參考 <http://doi.airiti.com>

For more information,

Please see: <http://doi.airiti.com>

請往下捲動至下一頁，開始閱讀本篇文獻

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE



國小幾何教材內容之比較：以臺灣 與芬蘭為例

徐偉民* 董修齊**

摘 要

本研究旨在探討臺灣與芬蘭國小數學教科書，在幾何教材內容呈現的異同。研究對象為臺灣康軒版和芬蘭WSOY版教科書，採用內容分析的方法，以課程目標和數學問題為分析單位，依研究者設計的分析類目，來分析兩國幾何教材目標和內容呈現的特色。研究結果顯示，在幾何教材目標上，兩國皆強調透過操作來理解幾何形體的性質；在幾何教材內容上，兩國教科書中的幾何問題都以幾何形體的辨識與建置最多；不論是在教材目標和內容上，兩國空間幾何內容所占的比例都偏低。此外，本研究也發現，臺灣幾何問題多使用圖形和文字來呈現，並意圖經由解題結果來歸納和發現幾何形體的特色或定義；而芬蘭幾何問題的呈現則以圖形為主。兩國教材中，幾何概念呈現的順序和結構大致符合van Hiele幾何思考和發展的理論。

關鍵詞：內容分析、國小、幾何教材、數學教科書

* 徐偉民，國立屏東教育大學數理教育所副教授
電子郵件：Ben8535@mail.npue.edu.tw

** 董修齊，高雄市桂林國小教師
電子郵件：Mgdong.tw@yahoo.com.tw

投稿日期：2011年10月6日；修正日期：2012年2月22日；接受日期：2012年8月24日

The Content Analysis of Geometry Material in the Elementary Mathematic Textbooks of Taiwan and Finland

Wei-Min Hsu* Hsiu-Chi Tung**

Abstract

This study compared the geometry content of instructional materials used at the elementary school level in Taiwan and Finland. The instructional materials reviewed were the Kang Hsuan textbooks used in Taiwan and the WSOY textbooks used in Finland. The methodology employed was content analysis with curriculum objectives and mathematics problems as the analytic units. The analytic categories used in the data analysis were researcher designed and were subsequently used to comparatively analyze the curriculum objectives and the characteristics of the geometry instructional materials in the textbooks. The findings showed that understanding the features of geometric shapes through operations was emphasized in the curriculum objectives of both countries' textbooks. With regard to the mathematical content of the instructional materials, most of the problems in both

* Wei-Min Hsu, Associate Professor, Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Pingtung University of Education
E-mail: Ben8535@mail.npue.edu.tw

** Hsiu-Chi Tung, Teacher, Guei-Lin Primary School, Kaohsiung City
E-mail: Mgdong.tw@yahoo.com.tw

textbooks were classified as “identification and establishment of geometric shapes,” with many fewer objectives and problems classified as “spatial geometry.” Data also showed that Taiwan’s textbooks used pictures along with text to present geometric problems, and intended students to conclude and discover the features and definitions of geometric shapes through problem solving, while Finland’s textbooks mainly used pictures to present problems. The sequence and structure of geometric concepts in the textbooks of both countries were very consistent with the theoretical principles set forth by van Hiele on geometric thinking and development.

Keywords: content analysis, elementary school, geometry instructional materials, mathematics textbooks

壹、緒論

一、研究動機與目的

根據經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD）2006年「學生能力國際評估計畫」（The Programme for International Student Assessment, PISA）的調查報告，臺灣學生在全球57個參與國家中，數學能力表現居全球第一，而另一個受矚目的國家，則是在各項能力表現都名列前茅的芬蘭。若以臺灣學生數學表現差異的情況來看，在數學能力表現前四名的國家（臺灣、芬蘭、香港、韓國）中，以臺灣的差異幅度最大（標準誤為4.1），芬蘭的差異幅度最小（標準誤為2.3）（OECD, 2007）；在2009年的調查報告中，臺灣和芬蘭的數學表現雖略有下滑（分居5、6名），但仍然表現亮眼，只和前三名的上海、新加坡和香港有顯著差異，兩國學生的表現並無差異，但臺灣學生的差異幅度仍然高於芬蘭的學生（標準誤分別為3.4和2.2）。此外，芬蘭學生也在2000年和2003年的PISA測驗總成績中稱冠（OECD, 2001, 2004）。芬蘭學生優異的數學表現，不禁讓人感到好奇，也想進一步瞭解。

教科書對學生數學學習的表現扮演非常重要的角色，不僅提供教學內容和順序（Nicol & Crespo, 2006）、影響教師的教學實施（Lloyd, 2008），同時也是學生學習的主要依據（徐偉民，2011；Grouws, Smith, & Sztajn, 2004; Stein, Remillard, & Smith, 2007）。臺灣在過去十幾年來，爲了提升學生在數學學習上有更全面與優異的表現，進行數學教科書的改革，從過去學科本位、學生本位到目前能力本位的發展（鍾靜，2005），並從強調知識的獲得、知識建構轉爲強調能力培養（徐偉民、徐于婷，2009）。這除了受到數學教育改革潮流的影

響，也希望學生能培養多元的觀點、人際溝通和團隊合作等能力（Lott & Souhrada, 2000），以提升學生在未來社會的競爭力；而芬蘭也在1990年代進行課程改革，重新修訂國家核心的課程綱領，強調培養學生數學知識和能力的發展（National Board of Education [NBE], 2004）。兩個屬於國定課程的國家，幾乎在同一個時間進行課程全面的檢視和修改，且學生在國際測驗中都有傑出表現，讓人對兩國的數學課程感到好奇。

「幾何」不但是世界各國數學課程主要的學習內容之一，也是國際數學與科學教育成就趨勢調查（Trend in International Mathematics and Science Study, TIMSS）和PISA等國際大型測驗中主要的項目之一。Clements與Battista（1992）指出，幾何不但可以做為學習其他數學主題或科學題材的工具，加強幾何的空間思考，亦有助於高層次數學創造和思考能力的發展；美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989）指出，幾何的想法和思考對於數學表徵、數學其他領域，以及真實情境問題的解決是有利的，同時也是學生學習推理和瞭解數學結構公設的關鍵（NCTM, 2000）。從課程、國際測驗的內容、學者和NCTM的主張來看，都可以瞭解到幾何主題學習的重要性。近年來，臺灣學生雖然在TIMSS 2003和2007的測驗中表現突出，可是從四年級學生在不同數學範疇的得分（數、幾何和測量、資料呈現）來看，發現學生在幾何部分表現較差；若和鄰近表現優異的亞洲國家相比，臺灣四年級學生的幾何表現也不如新加坡、香港及日本等國學生的表現（Mullis, Martin, Gonzales, & Chrostowski, 2004; Mullis, Martin, & Foy, 2008）。學生在測驗中幾何表現較差的原因，是否和幾何教材的內容有關？臺灣教科書中幾何教材的重點為何？而國際測驗表現優異的芬蘭教科書，又是如何呈現幾何教材的內容？這些都引發研究者的興趣。因此，本研究欲針對臺灣與芬蘭國小數學教科書的幾何教材進行分析，來達成以下兩個目的：

(一) 分析和比較臺灣與芬蘭小學數學幾何教材目標之異同。

(二) 分析和比較臺灣與芬蘭小學數學教科書中，幾何教材內容呈現之異同。

考量臺灣與芬蘭對中小學數學學習階段劃分的差異，所以本研究目的中所指的小學數學教科書，是指國小一至五年級的數學教科書。而教科書的版本，將選用兩國小學教學現場占有率最高的版本來進行分析：臺灣康軒版數學（占有率36.38%）（康軒教育網，2011），和芬蘭WSOY版數學（占有率六至七成）（陳之華，2007）。至於教師手冊、習作、回家作業和額外練習等，則不列入本研究分析的範圍。目的中所指的幾何教材目標，是指兩國在數學課程綱要中，對幾何教材所設定的目標；幾何教材內容呈現，則是指數學問題的呈現，因為數學問題是數學教科書主要呈現的內容（Stein et al., 2007）。

貳、文獻探討

一、數學教科書比較研究的重要與架構

在美國，由於教育公平性議題的興起，以及NCTM（1989）出版《數學課程與評鑑標準》（*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*）一書後，開始引發學界對於數學課程研究的重視，以檢驗所提出的課程計畫或發展課程的有效性（Stein et al., 2007）。其中，數學教科書的內容便是受到關注與檢驗的焦點之一，因為教科書內容呈現的不同，不僅影響教師的教學實施，更會影響學生的學習結果（Tarr et al., 2008）。因此，國內外許多研究者投入數學教科書的比較研究，藉此來瞭解不同國家或版本的特色。在臺灣，徐偉民與徐于婷（2009）、徐偉民與林美如（2009）、陳仁輝與楊德清（2010）、吳麗玲與楊德清（2007），以及楊德清、施怡真、徐偉民與尤欣涵（2011）等人

都進行跨國性數學教科書的比較，透過內容分析的方法，來瞭解臺灣與其他國家教科書在不同數學主題上編排和呈現的異同；在國外，Zhu與Fan（2006）針對美國和中國數學教科書的問題型態進行分析。Charalambous、Delaney、Hsu與Mesa（2010）探討賽普勒斯、愛爾蘭及臺灣三個國家數學教科書的分數加減內容的特色；Son與Senk（2010）針對美國和韓國數學教科書分數乘除的內容進行分析。這些跨國性教科書內容的比較，都是希望藉由比較和分析的結果，瞭解自己國家數學教科書的特色，以及對教師教學和學生學習可能產生的影響，以做為日後本國教科書在編修或教師教學時的參考。

一般而言，跨國性教科書的研究包含橫向、縱向和脈絡分析三種不同的取向。在橫向分析方面，研究的焦點著重在一般教科書的特點，例如教科書外在的呈現方式（如教科書的名稱、數量、頁數等）和內容結構（如涵蓋的單元、單元順序等）等；在縱向分析方面，主要探討數學教科書如何處理單一數學主題，並把教科書視為知識建構的環境，包括傳達給學生的部分、學生的回應及連結等三部分；在脈絡分析方面，則關注師生於數學活動時使用教科書的情形，並將教科書視為是在更廣泛的脈絡下，包括是在歷史發展、文化形成、特定目的和特別意圖下所形成的產物（Charalambous et al., 2010）。由於脈絡分析關注的是教科書實施的情形，以及教科書作者和出版者的主觀意圖，而這部分屬於教室內數學教科書使用或實施的情形，所以大多數進行教科書分析的研究者並未將脈絡分析納入研究中（陳仁輝、楊德清，2010；Charalambous et al., 2010; Zhu & Fan, 2006）。本研究並未探討教科書實施的層面，因此將參考橫向與縱向的分析面向，來分析臺灣和芬蘭國小數學教科書幾何教材的異同。教科書橫向和縱向分析的架構如表1。

表 1 數學教科書的分析架構

教科書橫向分析

■背景資料

包括名稱、書籍數量、頁數（數目和密度）、作者和諮詢委員的介紹、出版社和出版年份、相關材料（如教學指引，教具等資源）等

■整體結構

包括單元數量及每一單元平均的頁數、單元結構、涵蓋的主題、主題的順序等

教科書縱向分析

傳達給學生的部分

■數學內容

包括特定主題的結構；定義、規則、公設；插圖、表徵

■數學練習

包括例題、思考模式

■態度

包括公平、對數學的觀點

學生的回應

包括潛在的認知需求（如記憶、程序、連結、解題等）、回應的方式（如只有答案、數學列式和答案、解釋、推理等）

連結

包括與課程標準（綱要）連結、與課堂教學／教科書連結、與校外情境連結

資料來源：Charalambous et al. (2010: 123).

二、幾何概念的特徵與相關研究

幾何課程相關的理論中最為人熟知的是Piaget學派和van Hiele（1986）關於幾何思維發展的理論。Piaget、Inhelder與Szeminska（1960）將兒童的幾何概念發展分成四個不同的發展階段：（一）拓樸概念階段。此階段的兒童僅能掌握拓樸學的圖形概念，只注意到圖形是否封閉或開放，忽略邊長、角度、大小等相對的關係及正確形狀。（二）射影幾何概念階段。此階段兒童認為凡經過自身視覺所承認的事物，他們才認為真實存在。同時，兒童能利用直線投影，排成一直線，圖形不再是單一存在，而是彼此間有關係存在。（三）歐氏幾何概念階段。兒童的射影幾何概念伴隨著歐氏幾何概念的發展，大約在5歲以後，對於圖形的認知不再受到視覺的影響，他們知道不論圖形怎樣移動，形

狀、大小均保持不變。(四)座標概念或參照系統。空間概念發展成熟後才能具備座標概念，通常兒童若能運用上下的關係將許多點連起來，並能找到一個基準點去表示此線上某一點的位置，就有縱坐標的概念；若能協調上下與左右的坐標，就有平面坐標的概念。

van Hiele (1986) 亦從認知發展的角度，提出了幾何學習發展的五個層次：(一)視覺期。學習者能透過圖形的整體外觀輪廓辨認，但不能利用圖形的特徵或組成要素來分析。(二)分析期。此時學習者考慮的是一整組的形狀，不是只對單一圖形的認識，能分析與察覺圖形特徵及組成要素，但不能解釋性質之間的關係。(三)非形式化演繹期。這個層次的學習者能瞭解、掌握、運用構成圖形的各種要素，並且能夠更進一步地探求各種圖形特徵，以及各圖形間的包含關係。同時也能瞭解定義，並解釋非正式的論證，但不能瞭解證明定理的重要性，無法由不熟悉的基本前提去證明結果的成立。(四)形式演繹期。學習者此時對幾何圖形不只是視覺觀察、分析或記憶圖形的性質，而是能夠證明，能理解充分或必要條件的內在關係，能發現正逆命題之間的差異性，同時能對幾何的公理系統做出推論。(五)嚴密期。學習者不僅在某一個幾何系統中做推論，而且能在不同公設系統間進行比較分析，也可以瞭解抽象推理幾何，甚至可自創一種幾何公設系統。

Piaget學派和van Hiele都強調幾何認知發展的順序，而且都是從視覺的、整體的幾何圖形的概念與辨識，逐漸到從分析的角度去瞭解圖形的構成要素，以及要素之間彼此的關係。之後，再逐漸透過非正式或正式推理的方式，進入到不同幾何系統的學習。這樣幾何認知發展的順序，似乎可以在臺灣與芬蘭的幾何教材目標中看到這樣的安排，但仍需進一步的分析。

三、數學教科書的相關研究

(一) 國內外數學教科書的相關研究

國內外進行數學教科書分析的研究發現，雖然研究者採取的分析單位不同，但卻都採用內容分析的方法，而且也大都根據理論與相關的研究來發展分析的類目，針對某一個數學學習主題或年級來進行分析。例如：徐偉民與徐于婷（2009）以數學問題為單位，參考了代數概念的特徵與NCTM（2000）對中小學代數學習的範疇，發展了分析類目來分析臺灣和香港代數教材的異同。結果發現，兩地代數教材都強調代數基本概念與關係式與方程式的內容，但臺灣的代數概念採螺旋式方式呈現，香港則採主題式方式呈現。陳仁輝與楊德清（2010）針對臺灣、美國和新加坡七年級代數教材進行比較，同樣以問題為單位，參考三國課程綱要的內容和陳宜良、單維彰、洪萬生與袁媛（2005）的跨國比較性研究結果發展出分析類目，結果發現美國「情境數學」的布題以情境問題為主，強調概念性知識的學習，而臺灣「部編版數學」和新加坡「新課程數學」都以無情境問題為主，而且強調程序性知識的熟練。楊德清等人（2011）分析臺灣、美國和新加坡國小一年級數學教材的異同，以教學目標為單位，參考了國內外相關教科書的研究以及三國國小一年級數學學習內容後，形成分析類目來進行分析，結果發現新加坡「大家一起學數學」在「數」的學習範圍上較廣，美國「每日數學」整體學習範圍上較廣，初步介紹了機率的概念，而臺灣的「部編版數學」則缺少幾何樣式的延伸與擬題的教學目標。

在國外的相關研究上，Charalambous等人（2010）選擇了賽普勒斯、愛爾蘭和臺灣等三個都是國定課程的國家，根據教科書的分析架構（如表1），從單元的主題、呈現的順序、例題的呈現、架構、解題時所需要的認知需求和要求等六個層面，針對分數加減的內容進行比較分析。結果發現，在這六個層面上

三個國家都有異同之處，而且從這六個層面可以看出三個國家都有自己教科書呈現的特色。Zhu與Fan（2006）以數學問題為單位，分析中、美兩國中學（七、八年級）數學教材中數學問題類型的異同。從例行性問題與非例行性問題、傳統問題與非傳統問題、開放性問題與封閉性問題、應用問題與非應用問題等分類與統計中來瞭解兩國數學教科書的學習焦點。Son與Senk（2010）比較美、韓兩國五、六年級教科書中分數乘除法內容的異同，以單元和數學問題為分析單位，從單元涵蓋的節數和數學問題的類型（包含計算步驟的數量、回應答案的類型、問題情境、認知的期望）來進行分析，結果發現兩國在分數乘法的節數相當，但韓國課程提早一個學期；在分數除法上，兩國呈現的時間相同，但是在節數上，韓國是美國「每日數學」的5倍，在問題數量上，韓國是美國的8倍，而且在多步驟的計算問題上，韓國也高於美國。這些研究都說明了教科書分析時使用方法的趨勢，以及分析單位與類目的重要，我們可從結果中瞭解到教科書內容的特色。

（二）數學教科書幾何教材的相關研究

在幾何教材的研究上，莊月嬌與張英傑（2006）對國內九年一貫各版本幾何教材進行分析，以頁為單位，參考幾何課程綱要的內容、國小幾何教材的內容，以及van Hiele的幾何認知發展理論，形成分析的類目，包括「形體外觀的辨識與建置」、「形體組成要素之辨識、發現與應用」、「形體性質之探究並運用其性質解題」、「形體的切割、重組與變換」，以及「空間概念」等類目來進行分析，結果發現，各版本在幾何教材頁數所占的分量差異很大，各版本在幾何性質探究和運用上分量最多，形體構成要素的發現與應用居次，但在空間概念上差異很大。徐偉民與林美如（2009）針對兩岸三地的幾何教材進行分析，以活動為單位，參考van Hiele幾何認知理論的內涵、臺灣幾何課程綱要的內容、美國NCTM（2000）對幾何學習內容的分類，以及莊月嬌與張英傑

(2006)的研究分類，形成「幾何形體的辨識與建置」、「幾何形體的操作與變換」、「幾何形體的性質分析」、「幾何形體的空間概念」、「幾何形體的解題」等類目來進行分析，結果發現，中國注重空間概念的發展並融入幾何史的內容，香港則重視操作與生活化，內容範圍較深較廣，而臺灣空間概念的呈現較少。

上述兩份幾何教材的研究，雖然對象不同，分析單位不同，但都參考了類似的理論依據來發展分析類目，而且分析結果都得出分析對象的內容與編排方式，符合van Hiele的理論主張。而van Hiele (1986)理論強調幾何認知發展的序列性，從視覺期能對基本形體進行觀察、辨識、命名開始，到分析期能察覺與瞭解基本形體的組成性質，且於進入非形式演繹期後，能透過操作，例如堆疊、切割、翻轉等方式來檢視幾何形體之間的關係，並能從二維到三維，逐漸認識空間中的相對關係，最後再從辨識形體內及形體間的關係發展出應用解題的能力。本研究參考上述兩篇研究中共有的分析類目，以及van Hiele理論中強調形體辨識、組成性質理解、操作理解形體間關係、空間概念發展，以及應用解題的順序，建構出包括「幾何形體之辨識與建置」、「幾何形體組成性質與應用」、「幾何形體之操作與關係」、「空間幾何」、「幾何形體之解題」等五個主要分析類目，希望可以藉由過去教科書研究均採用的內容分析方法，以及本研究所發展的分析類目，來分析臺灣和芬蘭國小數學教科書幾何教材的內容，並從中瞭解自己幾何課程的特色與不足之處，做為日後教材編寫或教學實施的參考。

參、研究方法

一、內容分析法

許多研究領域經常需要透過文獻的分析或文件資料的彙整而獲得完整的

資訊，因此，內容分析法便常應用於文件分析的研究中（王文科，2002）。許多課程內容的分析也是如此，也採用內容分析法來進行分析與比較（徐偉民、徐于婷，2009；陳仁輝、楊德清，2010）。不過，初期的內容分析法較偏向量化的分析，但此定義在今日已經顯得過於狹隘，歐用生（1994）認為，內容分析法是透過量化的技巧以及質的分析，採客觀與系統的態度，對文件內容進行研究與分析，藉以推論產生該文件內容之環境背景和意義的一種研究方法。本研究先採用定量分析的方式加以統計，以瞭解臺灣和芬蘭在幾何教材目標和內容在類目分布上的差異，再輔以定質分析的方式，探討兩國幾何教材內容呈現方式的異同。

二、分析單位與類目

分析單位為內容量化時的分析標準，最常使用的分析單位有字、主題、項目、章、段、詞、句、頁等，每個單位都有其優劣，研究者可依其研究性質及內容選擇合適單位（歐用生，1991）。數學教科書大都以單元、教學活動和數學問題的方式呈現，若以單元為分析單位，則因單元內包含的範圍太廣，涉及的幾何概念太多，無法進行明確的歸類與詳細的分析。例如臺灣康軒數學五上第七單元「三角形與扇形」，此單元對應的能力指標有三項，單元內的問題則有20題。若以單元做為分析單位，許多單元內的概念將被忽略。若以教學活動做為單位，也會遭遇類似的問題。但若以數學問題為單位，則每個問題將涉及一個主要的數學概念，因此適合做為分析的單位，這是本研究選擇以「問題」為分析單位的原因。

而在分析的類目上，本研究參考莊月嬌與張英傑（2006）、徐偉民與林美如（2009）的分類，再根據van Hiele理論中對於幾何概念發展的順序，形成本研究的主類目，再根據主類目的內容，並參考上述兩篇研究的次類目，來形成

本研究分析類目，如表2。

表2 小學幾何教材內容分析類目表

主類目	次類目	說明
A. 幾何形體之辨識與建置	A-1 辨識幾何形體	形體之辨認、命名、描述、分類
	A-2 建置幾何形體	形體之描繪、建造與比較
B. 幾何形體組成性質與應用	B-1 形體組成要素與特徵	理解形體的組成要素，例如形體之頂點、線、面、角、邊。例如四邊形由四個頂點、四條邊組成
	B-2 形體的定義	包含形體及其相關性質的定義（如平行），能對不同的形體進行分類
	B-3 透過實作察覺形體性質	使用尺規、作圖、實物比較，理解形體性質。例如三角形內角和、邊長關係等
	B-4 察覺形體性質間的關係	察覺形體內或形體間性質之間的關係。例如長方形面積與周長之關係、不同四邊形性質之異同等
C. 幾何形體之操作與關係	C-1 理解平面鋪設與立體堆疊	透過操作完成指定形體的鋪設或堆疊，理解形體鋪設或堆疊後的空間關係
	C-2 形體之切割與重組	具體進行形體的切割與組合，並瞭解切割組合後相關性質的改變情形（如面積）
	C-3 理解相似、全等性質	透過操作察覺、理解形體間相似、全等性質，並描述形體間構成要素（角、邊）之關係
	C-4 形體平移、翻轉、旋轉之關係	察覺、描述形體經平移、翻轉、旋轉後的關係
	C-5 利用變換檢查形體對稱關係	使用變換檢查形體線對稱或旋轉對稱的關係
D. 空間幾何	D-1 描述形體位置、方位、座標	運用上下、左右、內外、東、西、南、北、座標系統等詞彙，來描述形體的位置
	D-2 從平面表徵，辨識與建造立體圖形	以平面表徵的方式來辨識、轉換立體形體，並理解其關係，如展開圖、透視圖等
E. 幾何形體之解題	E-1 幾何形體的測量	測量形體之長度、角度、面積、體積等
	E-2 幾何形體公式的推演與應用	由形體定義和性質，推演形體公式，計算形體之周長、面積、體積等

其中前四項主類目的幾何問題，都是透過觀察、辨識、操作等方法來進行解題，而「E.幾何形體之解題」的類目，則主要是指透過測量或公式來進行幾何形體的計算（含幾何形體公式的推演），也就是「幾何量」測量與計算的問題，將會被歸類在E的類目中。

三、研究對象

由於臺灣與芬蘭數學學習階段的不同劃分，以及芬蘭數學幾何教材目標呈現的方式，無法區分何者為六年級幾何教材的核心內容（臺灣可以從分年細目中來區分），所以本研究以兩國國小一至五年級數學教科書的幾何教材為對象，來進行兩國幾何教材目標和內容的分析比較。

（一）臺灣康軒數學

臺灣教科書採一綱多本制，目前使用的版本有康軒版、南一版、翰林版、部編版等，其中，康軒版為國內占有率最高的版本（36.38%）（康軒教育網，2011）。康軒國小數學教科書係依據2003年教育部發布之《國民中小學九年一貫課程綱要》編輯而成，根據其教科書中所敘寫的編輯要旨，其教材發展是以生活為中心，配合各階段學習者的身心與思考發展。因97課綱將於100學年度實施，故本研究採用依92課綱編寫之2009年出版的康軒數學為研究對象。

康軒數學每學期一冊，國小一至六年級共12冊。康軒數學在每一冊中包含數學領域的四大學習主題，每個主題包含數個單元。以本研究探討之對象一至五年級來說，共有112個單元，其中有21個單元是屬於幾何的主題（如表3），占全部單元數的18.7%。本研究分析的幾何教材內容，僅限於教科書內容，不包含習作或教師指引。此外，臺灣將形體之周長、體積等屬於幾何量的能力指標，同時列入數與量和幾何學習之主題中，所以，有兩項幾何量的能力指標S-2-07、S-2-08和數與量的能力指標N-2-17、N-2-19的內容相同。幾何量

表3 臺灣康軒數學各冊幾何相關單元數量及其名稱

冊別	單元數	單元名稱（數字為第幾單元）
1上	3	3.在哪裡；4.排順序、比多少；6.方盒、圓罐、球
1下	1	10.做圖形
2上	1	8.水平和鉛直
2下	1	9.平面圖形與立體圖形
3上	2	3.周長與面積；8.圓與角
3下	1	5.周長與面積
4上	3	2.角度；4.垂直與平行；8.三角形
4下	3	3.四邊形；5.體積；8.周長與面積
5上	4	3.正方體、長方體和球；7.三角形與扇形；8.體積；9.表面積
5下	2	2.面積；9.線對稱圖形

的部分，也屬於本研究分析的範圍。

（二）芬蘭WSOY數學

「解題」在過去20幾年間，都是芬蘭數學課程的主軸，教科書也採用解題取向的方式來進行編輯（Pehkonen, 2009），WSOY所編輯的教科書也不例外。芬蘭和臺灣一樣，是屬於一綱多本的國家，在1994年時芬蘭訂定《基礎教育國家核心課程綱領》，於2004年針對《基礎教育國家核心課程綱領》修正調整，完成新的《基礎教育國家核心課程綱領》（NBE, 2004）。WSOY所發行的Laskutaito系列數學教科書，是依據2004年《基礎教育國家核心課程綱領》編輯的教科書，目前是芬蘭各中小學使用比例最高的教科書（陳之華，2007），也是唯一提供英語內容的版本，這是本研究以其為研究對象的原因。

WSOY數學每學年兩冊，共12冊。該版本強調其內容的主要目的在於幫助學生獲得概念的理解，以及發展學生的推理能力（Saarelainen, 2009c）。WSOY數學每冊包含不同數學主題的單元，單元數不多，約四至五個。以本研

究探討的對象一至五年級來說，總計有46個單元，其中直接以“Geometry”為單元名稱的只有5個，分別出現在1B、2B、3A、4A、5A中，在4A中也出現“Units of measurement and coordinates”的單元名稱，意即共有6個幾何相關的單元，占全部單元數的13%。芬蘭幾何單元的名稱簡略，不易從單元名稱中瞭解單元中學習的概念，而且在每個單元的後面（包含幾何和非幾何單元），WSOY數學都提供了「解決問題」、「開放性問題和練習」及「益智問題」給學生練習，在非幾何單元提供的練習，或是測量單元中也都會出現幾何相關問題，這些問題都會列入本研究的計數與分析。此外，芬蘭教科書後面也用藍色與紅色兩種色塊來區隔出「額外的練習」和「回家作業」兩部分，這兩部分類似臺灣教科書的習作，因此不列入本研究分析的範圍。

四、信度分析的過程與結果

本研究採「相互同意度」進行信度檢定，邀請兩位現職國小教師擔任評分員，其中一位已具有課程與教學碩士學位（甲），另一位目前攻讀教育相關碩士（乙），連同本文的第二作者（研究者二）三人，進行「評分員的一致性」信度檢定。以下說明信度之分析過程與步驟。

（一）抽取檢定樣本：先隨機選出數學教科書國小一至五年級任一冊，臺灣與芬蘭相對應的冊別必須相同，再列出該冊所有單元及問題，進行分類編碼。

（二）分類說明：將類目表及其定義發給評分員閱讀，並說明分類的方式與原則。

（三）歸類：本文第二作者與兩位評分員針對類目表加以溝通、釐清、修正、建立共識後，分別獨立進行類目歸類工作。

(四) 信度計算：先計算評分者間的相互同意度 ($P_i = \frac{2M}{N_1 + N_2}$)，再求

得平均相互同意值 ($P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{N}$)，最後歸類之結果依伯格納簡易信度公式求出

信度 ($R = \frac{nP}{1 + [(n-1)P]}$ ，R須大於0.8) (歐用生，1991)。本研究教材目標

和內容的信度計算結果如表4和表5。

表 4 教材目標信度結果

評分員	甲	乙
研究者二	0.882	0.874
甲		0.904
平均相互同意值 $p = .89$		
信度 $R = .96$		

表 5 教材內容信度結果

評分員	甲	乙
研究者二	0.867	0.889
甲		0.873
平均相互同意值 $p = .88$		
信度 $R = .96$		

其中，教材目標的分析包含臺灣和芬蘭第一、二學習階段中所有的目標，而教材內容由於包含的題數太多，參考過去相關研究的作法 (徐偉民、徐于婷，2009)，所以只選擇四年級上冊 (4A) 教科書中的幾何問題進行分析來建立信度。不過，對於信度建立過程中歸類不同的問題，都經過三位評分員再次的討論與確定，以做為後續正式分析的依據。同時，在正式分析時遇到歸類

的疑問時，也都經由討論來做最後的確認。

五、效度考驗的過程和步驟

檢視內容分析效度的方法，包含評審團法、已知團體法、獨立效標法、建構效度及預測效度等（王石番，1991）。其中，評審團法是研究者邀請若干位專家，針對研究設計、變項定義、抽樣方法等研究過程進行評析，並提出改善研究品質的看法。本研究即採評審團法檢測效度，研究者根據van Hiele幾何認知發展層次，並參考莊月嬌與張英傑（2006）以及徐偉民與林美如（2009）幾何教材分類等相關文獻，統整發展出「小學幾何教材內容分析類目表」。為了使分析類目的面向更加完備，且符合研究之需求，本研究先對臺灣與芬蘭幾何能力指標做初步分析，並隨機抽取臺灣康軒版數學五年級下冊、芬蘭WSOY版數學三年級上冊（3A）試做分析。進行初步分析後，與擔任縣市數學領域輔導員的三位現職教師進行討論，針對分析過程中遭遇的問題進行分析類目的細部調整，再請具有數學教育專長且有數學教科書研究經驗的大學教授檢視，將意見統整後發展出分析類目表（如表2）。

上述效度考驗的過程顯示，本研究之分析類目有充足的理論依據，且經具有數學教育專長的大學教授檢驗修訂，以建立「專家效度」，使本研究發展的分析類目更切合本研究的需要。

六、資料處理與分析

在資料處理方面，本研究以「數學問題」為計數單位，根據自行發展的分析類目，將每個問題分類並登錄於其隸屬的類目中。每個問題只登錄在一個次類目中，因為王文科（2002）指出，分析的類目應該是彼此獨立且互斥的，因此任一問題如被劃歸在某一類目，就不能同時劃入另一類目中。如果問題呈

現兩個以上之次類目，則以該問題主要呈現的類目來計次。在資料分析上，在量的分析方面，利用次數分配與百分比等統計量，描述各類目出現之次數，探究幾何教材目標和數學問題在各類目百分比的分布；在質性分析方面，依據分析類目來歸納並分析幾何教材內容呈現與編排方式，佐以圖表相輔，使分析結果更為周延深入。

肆、研究結果與討論

一、臺灣與芬蘭幾何教材目標之比較

(一) 兩國幾何教材目標的異同

臺灣和芬蘭的數學課程，在整體的目標上，除了希望學生學習數學相關的知識和技能外，也強調培養學生的數學素養，強調在解題的過程中發展學生思考、推理、溝通等能力（教育部，2003；NBE, 2004）。同時，課程內容也從過去數學知識結構的編寫方式，逐漸轉向學生和能力本位方式的編寫（鍾靜，2005；Pehkonen, 2009）。雖然兩國中小學數學課程劃分不同的學習階段（臺灣分為1~3、4~5、6~7、8~9年級四個階段，芬蘭分為1~2、3~5、6~9年級三個階段），但學習的主題類似，都包含數與計算、幾何、代數、測量、統計與機率等，而且兩國整體數學課程目標相似，都採分階段的方式來規劃不同階段的數學學習目標和內容。

但若再仔細檢視兩國幾何教材的目標則發現，其呈現的方式和內容有所不同。例如：臺灣九年一貫數學課程之幾何教材目標（稱為能力指標）依學習階段、以條列式的方式來呈現該階段學生應具有的概念或能力，其中，第一階段強調幾何形體的認識、探索與操作；第二階段學習運用幾何形體的構成要素（如角、邊、面）及其數量性質（如角度、邊長、面積）；第三階段透過形體

的分割、拼合、截補、變形及變換等操作，來瞭解形體的性質與幾何量的計算及非形式化推理，且透過方位描述及立體模型以培養空間能力及視覺推理；第四階段由具體操作情境進入推理幾何情境中，最終目標是學會推理幾何證明（教育部，2003）。

芬蘭核心課程綱領也以學習階段的方式，分成三部分來呈現課程的目標和內容。首先，呈現該階段整體數學學習的目標，例如理解概念的結構；接著呈現不同數學學習主題的核心內容，包含數與計算、幾何等；最後呈現學生在該階段學習結束時，包含思考與工作的技能，以及在不同學習主題上理想的學習表現（NBE, 2004）。在芬蘭數學課程的目標中，並沒有明確列出各年級的幾何教材的目標，不過，從各階段幾何核心內容和學習後理想的表現來看，發現芬蘭希望學生在第一階段能認識幾何圖形的基本形式，以及簡單平面幾何圖形的基本概念等；第二階段能知道如何定義圖形，能瞭解簡單的幾何圖形性質和熟悉平面圖形的結構；第三階段則是能應用幾何的性質與結構來解決相關的問題（NBE, 2004）。芬蘭各學習階段幾何教材的核心內容與學生在該階段結束時理想的學習表現，如表6所示。

表 6 芬蘭幾何核心內容與學後理想的幾何表現

階段別	核心內容	學後理想的幾何表現
第一階段 (1~2年級)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 觀察和描述周圍的空間關係 2. 觀察、描述和命名環境中的幾何形狀 3. 認識、解釋並命名二維和三維圖形 4. 基本幾何概念，如點、線段、水平線、射線、直線和角 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 瞭解平面和三維圖形的基本形式，包括四邊形、三角形、圓形、球和立方體，並能知道最簡單的平面圖形和幾何形狀的基本概念：點、線段、水平線、鉛垂線、射線、線段、角，以及他們的關係

表 6 (續)

階段別	核心內容	學後理想的幾何表現
	5. 製作、描繪二維圖形，並認識、建構三維圖形 6. 簡單的對應和放大	<ul style="list-style-type: none"> 知道如何使用簡單的對應和放大
第二階段 (3~5年級)	1. 放大和縮小；相似和比例尺 2. 在對應的線和點中，具體描述對稱與全等 3. 圓及其組成要素 4. 平行和垂直線 5. 角測量和角度的分類 6. 研究和分類不同形狀的多邊形 7. 周長和面積 8. 研究二維及三維圖形的幾何性質 9. 加強理解測量的原則 10. 計量單位的使用、比較和化聚 11. 評量測量結果；修訂測量	<ul style="list-style-type: none"> 知道如何形成圖形；能注意到簡單的幾何圖形性質，並能熟悉平面圖形結構的概念 認識相似，將知道圖形的邊如何對應，依圖形比例放大和縮小；辨別線對稱的圖形 理解測量的原則，知道如何衡量物件的大小，以及如何用適當的計量單位表示 知道如何計算平行四邊形和三角形的面積和周長
第三階段 (6~9年級)	1. 角度之間的關係 2. 三角形和四邊形相關概念 3. 正多邊形 4. 圓和相關概念 5. 計算平面圖形的周長和面積 6. 三維圖形的命名和分類 7. 計算三維圖形體積和表面積 8. 相似和全等 9. 幾何架構 10. 繪製全等；對應、旋轉、轉換 11. 畢氏定理 12. 三角形和圓之間的關係 13. 三角形定理和處理直角三角形問題	<ul style="list-style-type: none"> 認識不同的幾何圖形且知道他們的性質 應用所學的方法計算周長、面積和體積 使用指南針和尺，製造一個簡單的幾何結構 找出相似、全等和對稱的圖形，能將此技能用在調查三角形和四邊形的性質 在簡單的情境提供兩個角度之間的關係 使用畢氏定理和三角形定理處理部分直角三角形問題 進行測量和計算，並做常見計量單位之間的轉換

兩國在數學課程的整體目標相似，但在幾何教材目標的描述上卻有差異。臺灣的敘述以能力為基礎，「統整地」說明學生應具備的幾何概念或能力，並未侷限在某一個幾何形體的內容或性質；而芬蘭的敘述則以數學概念為基礎，「明確地」描述學生在各階段學習後應具備的幾何概念和表現。例如，在第一個學習階段，臺灣描述學生應具有「幾何形體的認識、探索與操作」的能力，而芬蘭則指出學生應「瞭解平面和三維圖形的基本形式，包括四邊形、三角形…」；此外，芬蘭幾何教材的目標也未提及關於「空間能力」、「視覺推理」、「非形式化推理」、「推理幾何證明」等在臺灣幾何教材目標中出現較抽象或較高層次的概念。

（二）兩國幾何教材目標所屬類目之分布

芬蘭幾何教材目標呈現的獨特性，無法從課程綱要中瞭解國小六年級幾何課程目標。在考量學習階段的劃分以及兩國幾何目標的比較下，本研究選擇國小一到五年級數學教科書中幾何教材目標和內容進行分析比較。同時，幾何教材的目標，在臺灣是指前兩個學習階段的能力指標，芬蘭則是指核心內容的部分。臺灣幾何能力指標有15項，芬蘭幾何核心內容有17項，數量相當，在五個主類目中皆有分布，兩國幾何教材目標在主、次類目的分布情形如表7。

以主類目來看，兩國目標較著重在「B.幾何形體組成性質與應用」，較少在「D.空間幾何」，分布情形有些雷同。兩國差異較大的是在「E.幾何形體之解題」的部分，芬蘭對應到的能力指標有4項，將近四分之一的比例提及幾何解題，但是臺灣只有兩項能力指標，分別是「S-2-07能理解長方形面積、周長與長方體體積的公式」和「S-2-08能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式」，這兩項能力指標屬於幾何量的部分。幾何量的目標在臺灣會同時出現在「幾何」和「數與量」課程中（在數與量課程中的編號分別為N-2-17、N-2-19），且內容相同；從次類目來看，「A-1辨識幾何形體」和「B-3

表 7 臺灣幾何能力指標與芬蘭幾何核心內容之比較

類目	臺灣			芬蘭				
	對應指標	比例	總比例	對應指標	比例	總比例		
A. 幾何形體之辨識與建置	A-1	2	13.3%	3	3	17.6%	4	
	A-2	1	6.7%		20%	1		5.9%
B. 幾何形體組成性質與應用	B-1	2	13.3%	6	1	5.9%	5	
	B-2	1	6.7%		40%	1		5.9%
	B-3	3	20%		2	11.8%		29.4%
	B-4	0	0%		1	5.9%		
C. 幾何形體之操作與關係	C-1	0	0%	3	0	0%	3	
	C-2	1	6.7%		20%	2		11.8%
	C-3	1	6.7%		0	0%		
	C-4	0	0%		1	5.9%		
	C-5	1	6.7%		0	0%		
D. 空間幾何	D-1	1	6.7%	1	1	5.9%	1	
	D-2	0	0%	6.7%	0	0%	5.9%	
E. 幾何形體之解題	E-1	0	0%	2	3	17.6%	4	
	E-2	2	6.7%	13.3%	1	5.9%	23.5%	
總計		15	100%	100%	17	100%	100%	

透過實作察覺形體性質」是兩國幾何教材目標中出現較多的次類目（臺灣芬蘭在A-1和B-3都有兩項以上），可見兩國幾何教材目標都強調幾何圖形辨識的基本能力，同時也希望學生能多利用實作的方式理解形體性質。兩國在空間幾何的比例偏低，都只有在「D-1運用詞彙描述物體位置、方位、座標位置」出現一項對應的目標。臺灣與芬蘭皆在第一階段的能力指標提到有關空間幾何的敘述，臺灣強調物體的相對位置，芬蘭關注於察覺周遭的空間關係。兩國次類目差異最大的在「E-1幾何形體之測量」，這是因為在臺灣幾何的能力指標中，並未透過幾何形體的測量來認識長度的單位和概念，而是在數與量的能力指標中，透過具體物（如鉛筆）來進行。雖然本研究將能力指標或核心內容計數為

次數來進行歸類與統計，但每項能力指標或核心內容所涵蓋的範圍並不相同，因此在進行推論時必須特別謹慎。然而，透過能力指標或核心內容的計數與歸類，確實可以對兩國幾何教材目標的分布有所理解。

整體來看，臺灣與芬蘭幾何課程目標較著重在幾何形體組成性質的理解與應用，而且都強調透過實作來理解不同幾何形體的性質。而在「空間幾何」的部分，兩國著墨都不多，是否是因為空間幾何概念對於國小一至五年級的學生較為抽象，所以相對應的能力指標較少？這部分則需要進一步的探討。

二、臺灣與芬蘭幾何教材內容呈現方式之異同

（一）教材中幾何問題所屬類目之分布

兩國教科書中幾何問題在類目表的分布情形，如表8。從主類目來看，兩國都在「A.幾何形體之辨識與建置」類目中占的比例最高（臺灣32%，芬蘭34%），表示兩國皆把幾何形體的辨識和建置列為教學的主要內容，而且一、二年級在此類目占的數量最多；在「D.空間幾何」的問題分量上都較少，顯示一至五年級的幾何教材中，空間概念及立體圖形的問題相對較少，尤其臺灣空間幾何的問題只出現在一年級與五年級。但兩國也有不同之處，例如：芬蘭以「C.幾何形體之操作與關係」的問題分量為次多，與臺灣在此類目問題所占的比例相差16.5%，顯示芬蘭幾何問題著重於透過幾何形體的操作而獲得幾何概念；而臺灣在「E.幾何形體之解題」的問題所占的比例比芬蘭高出13.9%，可見臺灣的幾何教材較強調幾何量的測量與計算。再從次類目來看，臺灣與芬蘭均以「A-2建置幾何形體」所占的教材分量最多，而「A-1辨識幾何形體」居第二，這兩個次類目之相關問題在臺灣與芬蘭國小一至五年級的每冊教科書中都有，可見圖形辨識與建置為幾何認知發展的基本能力。對照兩國幾何教材目標和教科書中幾何問題在類目上所占的比例，發現兩國均有不一致的情況，在

表 8 臺灣與芬蘭數學教科書中幾何問題之類目分布統計表

類目	一年級		二年級		三年級		四年級		五年級		小計		合計		
	臺	芬	臺	芬	臺	芬	臺	芬	臺	芬	臺	芬	臺灣	芬蘭	
A	A-1	16	4	11	41	5	13	20	9	13	2	65	69	132	145
	A-2	6	28	8	31	17	9	25	3	11	5	67	76	32%	34%
B	B-1			8	7	4	9	3	2	5		20	18		
	B-2			6	2	1	10	11	3	2	5	20	20	102	78
	B-3			10	15	4	7	13	6	13	7	40	35	24.7%	18.3%
	B-4					2	1	9	4	11		22	5		
C	C-1	5	9		23		8	5				10	40		
	C-2				16	7	1	4	3	4		15	20	44	116
	C-3	2					1	8			15	10	16	10.7%	27.2%
	C-4		16		2						1	0	19		
	C-5				15		1		1	9	4	9	21		
D	D-1	16	3		10		8		14			16	35	34	43
	D-2				5				1	18	2	18	8	8.2%	10.1%
E	E-1			3		15		13	1	13	10	34	11	101	45
	E-2					5	6	19	9	43	19	67	34	24.4%	10.5%
小計	45	60	46	167	60	74	130	56	132	70	413	427			

註：A 為「幾何形體之辨識與建置」、B 為「幾何形體組成性質與應用」、C 為「幾何形體之操作與關係」、D 為「空間幾何」、E 為「幾何形體之解題」。

目標中兩國比例最高的都是「B.幾何形體組成性質與應用」，但教科書中幾何問題比例最高的卻是「A.幾何形體之辨識與建置」。

(二) 幾何教材呈現之異同

兩國幾何問題的數量和所占的比例如表9。從數量上來看，臺灣與芬蘭數學教科書中幾何問題的數量相當（臺灣413題，芬蘭427題），從幾何問題所占比例來看，兩國則有明顯的差異，例如：臺灣教科書中全部的數學問題有1,803題，幾何問題數量占全部數學問題的23%；芬蘭教科書中全部的數學問題有4,410題，幾何問題數量占全部數學問題的9.7%。若再從各冊所占比例來

表9 臺灣與芬蘭各年級幾何問題所占比例分析

冊別	臺灣			芬蘭		
	幾何問題	全部數學問題	比例	幾何問題	全部數學問題	比例
1上	31 (24.6%)	126	17.3%	20 (3.7%)	547	5.7%
1下	14 (10.4%)	134		40 (8.0%)	503	
2上	25 (16.3%)	153	15.9%	11 (1.9%)	586	13.8%
2下	21 (15.3%)	137		156 (24.9%)	626	
3上	44 (23.3%)	189	15.9%	64 (13.9%)	459	9.4%
3下	16 (8.5%)	189		10 (3.1%)	327	
4上	71 (29.7%)	239	28.8%	40 (10.6%)	378	7.6%
4下	59 (27.7%)	213		16 (4.5%)	358	
5上	80 (37.9%)	211	31.2%	55 (20.0%)	275	11.2%
5下	52 (24.5%)	212		15 (4.3%)	351	
合計	413 (23.0%)	1803		427 (9.7%)	4410	

看，臺灣幾何問題占全冊逾20%的有6冊，占全冊10%以上而未滿20%有3冊，不達10%則僅有3冊；而芬蘭幾何問題占全冊比例達20%以上的只有兩冊（2B和5A），有6冊的比例未超過10%，其中有5冊未滿5%。相較之下，芬蘭教科書幾何問題的比例明顯少了許多。而且臺灣從四年級開始，幾何問題所占的比例急遽上升，但芬蘭則未有如此的編排。以下根據五大類目來說明兩國幾何教材內容呈現的異同。

1.幾何形體之辨識與建置

此類目是指平面和立體圖形的觀察、辨識、仿作和建置，這是兩國幾何問題所占比例最高的類目，占了約三分之一的比例。在「辨識幾何形體」上，臺灣和芬蘭一年級都從日常生活中常見物品的觀察與分類中，讓學生認識簡單的立體圖形，但是芬蘭多了球體和錐體的認識，臺灣則是到了五年級才介紹球體。在平面圖形部分，兩國都從規則的平面圖形入手，但和臺灣相比，芬蘭一年級的平面圖形還呈現圓形和五邊形，平面圖形的圖例不僅只有凸多邊形，也

有凹多邊形的圖例，避免學生誤認為凸多邊形是多邊形的唯一表達方式（如圖1），而臺灣則以認識凸多邊形為主（如圖2）。由此看來，在幾何形體的辨識上，芬蘭教材出現的形體類別較多元，不過，並未介紹正三角形、等腰三角形、菱形與扇形等圖形名稱，兩國教材中出現不同幾何形體的比較（如表10）。

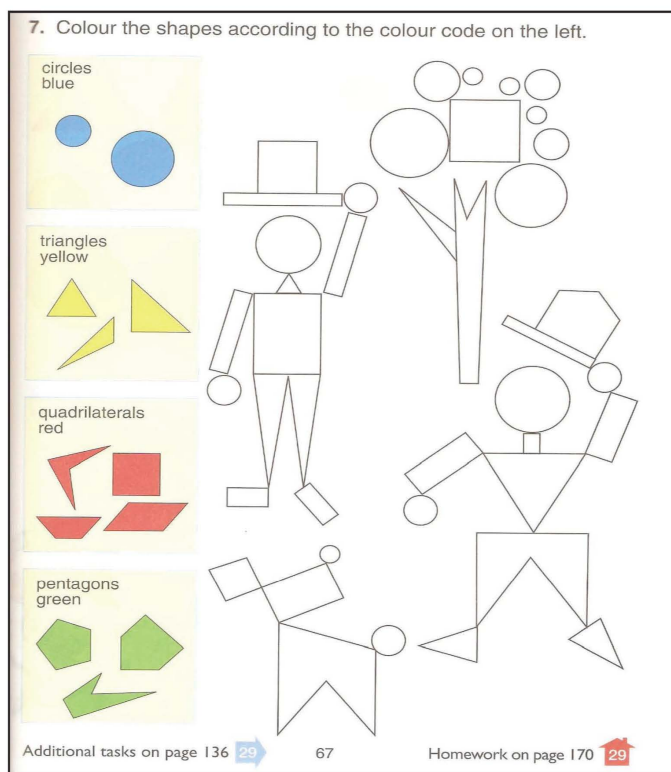


圖1 芬蘭 WSOY 數學辨識平面圖形事例

資料來源：Saarenlainen (2006: 68).

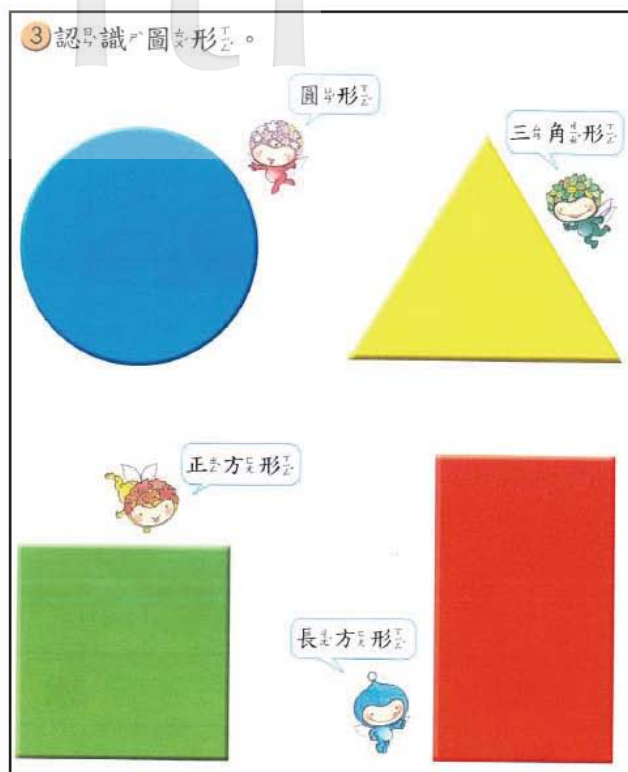


圖 2 臺灣康軒數學認識平面圖形事例

資料來源：楊瑞智主編（2009：67）。

「建置幾何形體」是兩國幾何問題數量最多的次類目，在平面圖形的建置上，兩國都以描繪的方式來辨認簡單的平面圖形，但臺灣以描繪規則的平面圖形為主，包括一、二年級進行長方形、正方形、三角形和圓形的描繪與鋪排，三、四年級進行操作和繪製，從中認識其構成要素（如圓心、直徑等）。而芬蘭描繪的圖形較為多變，包括一年級描繪凹四邊形和凹五邊形（如圖1）；二年級要求學生完成在方格紙上所呈現彎曲沒有閉合的形體，使它形成一個有八個小正方格在其中的圖形；三年級要求學生在方格紙上畫出符合題意的四邊

表 10 兩國教材中介紹不同幾何形體名稱的比較

		形體	臺灣	芬蘭
平面圖形	三角形	正三角形、等腰三角形	√	×
		菱形	√	×
	多邊形	五邊形	×	√
		凹多邊形	×	√
圓形	扇形	√	×	
立體圖形	柱體	圓柱	×	√
	錐體	圓錐、角錐	×	√

註：1. 「√」表示有出現，「×」表示未出現，兩國教材中共同介紹的形體名稱不列出。

2. 臺灣六年級出現五邊形、圓柱及角錐（下學期），但凹多邊形及圓錐仍未出現；芬蘭六年級仍未介紹正三角形、等腰三角形、菱形及扇形等圖形。

形，以及一個沒有任何直角的四邊形；四年級要求學生完成只顯示部分圖形的問題；五年級則要繪製包含圓與圓弧的複合圖形。由此看來，芬蘭在平面圖形的描繪上，內容較臺灣多元，挑戰性也較大。而在立體形體的建置上，臺灣在五年級用珠子和塑膠棒做出正方體和長方體的骨架，並進行視圖與透視圖的比較，而芬蘭則在四年級以硬紙板來製作正方體的骨架，並藉此瞭解正方體的點、線、面等構成要素。

2.幾何形體組成性質與應用


此類目是指經由辨識、實作來發現圖形的特徵和組成性質，並能發展出圖形分類的規則。兩國幾何問題在此類目所占的比例不低，臺灣占24.7%，芬蘭占18.3%。其中，在「形體組成要素與特徵」上，臺灣與芬蘭都從二年級開始引入。以臺灣為例，二年級下冊介紹平面圖形的角、邊和平面、頂點，圖形包含三角形、正方形、長方形等，介紹構成要素的方式多以問題提問，一個提問只關注形體的某一要素，並以提示的方式來引導學生，並未將答案直接寫出；而芬蘭則採用定義的方式呈現，搭配簡短的文字說明，並用題目練習來加


深概念。兩國在教材中出現的幾何形體，都會介紹其構成要素，不過臺灣並未介紹「四邊形內角和為 360° 」的性質，而芬蘭則是在五年級介紹。

在「形體的定義」上，臺灣多以開放性問題設計，不直接陳述幾何形體的組成要素，而是經由解題的結果歸納統整出該形體的定義，配合教科書安排的虛擬人物對話，以簡短的文字敘述說明形體定義及性質（如圖3）。而芬蘭則在該頁的左上方框內用精簡的文字陳述，甚至僅以簡單的圖示，搭配簡略的文字說明來介紹立方體的組成要素（如圖4）。有的活動甚至只有問題，沒有任何介紹說明或統整歸納的文字（如圖5）。此外，臺灣形體定義的時機通常比芬蘭呈現的時機早（例如正方形、長方形的定義，臺灣二年級出現，芬蘭在三年級；圓的定義臺灣在三年級出現，芬蘭在四年級），只不過芬蘭在介紹多邊形定義時，利用了大量的圖示，並定義多邊形是一個邊為直線的閉合形體，同時在辨識的練習題中，也置入許多的凹多邊形（如圖6），且在介紹鏡像圖形，更是只用了三張圖片，完全沒有文字說明來呈現（如圖5），由此可知，芬蘭「重圖示輕文字說明」的編排特性。

3.幾何形體之操作與關係

此類目是指圖形的操作與變換，包含鋪設、堆疊、切割、重組等，透過這些操作活動，探討形體之間的關係。兩國在此類目所占比例相差最多，例如：臺灣占10.7%，芬蘭占27.2%。在「理解平面鋪設與立體堆疊」上，芬蘭雖然沒有專門介紹鋪排與堆疊的問題，但常在延伸問題中讓學生去思考立體形體與空間關係，像是積木堆疊後算出積木數量的問題等，而且亦會利用鋪排瞭解形體之間的關係，例如：二年級利用一個或兩個三角形去排出指定的多邊形，包括凸多邊形和凹多邊形，教材中並無任何提示，學生必須思考與嘗試如何排出。而臺灣只有在一年級用圖形板或古氏積木排出指定的形體，以及四年級利用古氏積木做無空隙的立體堆疊。其中，在三角形排列出多邊形的問題

 活動 3 正方體和長方體 配合習作 89

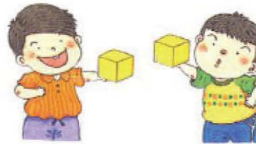
1 找找看看，生活中有哪一些物品和  很像？〈配合附件 19〉



像左邊邊的方形體，就叫作正方體。

2 數數看看，正方體有 個面。觀察這些面，你發現了什麼？

6 個面都是正方形。



6 個面都是一樣大。

圖 3 臺灣康軒數學幾何形體定義與性質事例

資料來源：楊瑞智主編 (2010a：104)。

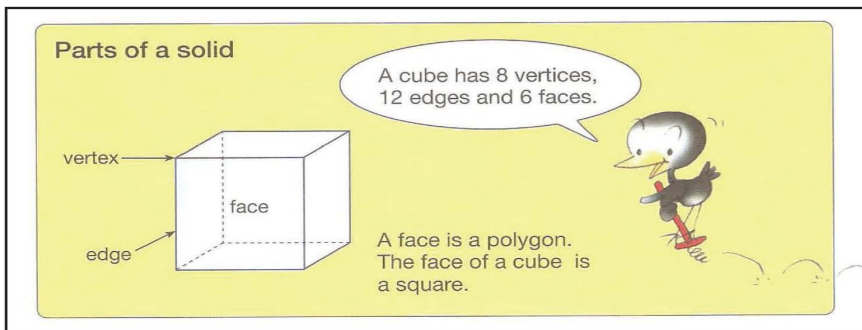


圖 4 芬蘭 WSOY 數學正方體組成要素事例

資料來源：Saarenlainen (2009d: 94).

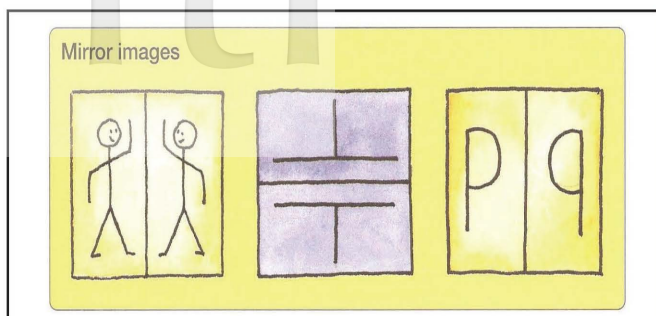


圖 5 芬蘭 WSOY 數學鏡像事例

資料來源：Saarenlainen (2009a: 56).

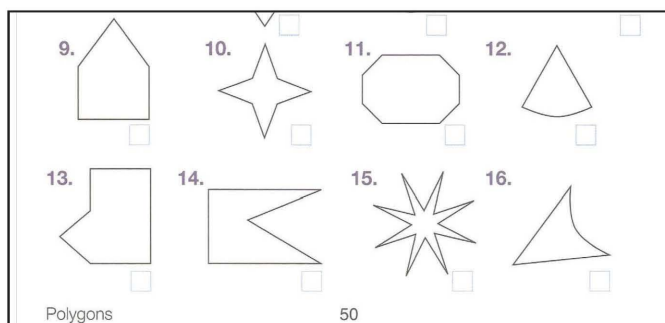


圖 6 芬蘭 WSOY 數學多邊形辨識事例

資料來源：Saarenlainen (2009a: 50).

中，臺灣都是要求學生以同樣大小的三角形進行排列，而且均提供線索。此部分相較於芬蘭，臺灣問題的挑戰性較低。

在「形體之切割與重組」上，能讓學生經驗體積與面積的保留概念，以及體積或面積的公式由來，例如平行四邊形的面積公式。這個部分，臺灣呈現得較詳細，芬蘭則僅用一個說明框敘述平行四邊形公式的由來，搭配幾張圖示。不過，芬蘭會利用切割來辨識幾何形體之間的關係，例如：用直線將圖形

分割成數個三角形或四邊形，或是將圖形做等分或不等分的分割；而臺灣沒有這樣的問題。

在「理解相似、全等性質」上，臺灣在較低年級時，會透過疊合活動讓學生找出形狀大小相同的圖形，四年級開始則帶入「全等」的概念，透過疊合操作，找出全等圖形的對應點、對應邊和對應角。芬蘭則是介紹「縮小圖」、「放大圖」，觀察課本上出現的長度標示與實際長度間之比例關係。臺灣一至五年級皆尚未出現幾何的比例關係，只有數的比例關係（五年級下學期「比率與百分率」單元）；在「形體平移、翻轉、旋轉之關係」上，臺灣沒有相關的問題，芬蘭則是在延伸題時，透過圖形的翻轉和旋轉，考驗學生空間推理能力；在「利用變換檢查形體對稱關係」上，臺灣在五年級出現線對稱概念，先覺察線對稱現象，再利用對稱性質製作對稱圖形（如圖7）。芬蘭則在二年級即出現線對稱圖形，透過鏡像的呈現讓學生觀察與辨認線對稱的現象（如圖5），到五年級則透過圖形的翻轉與旋轉，來宣告線對稱與點對稱的圖形，並且宣告翻轉或旋轉後的圖形，與原來的圖形全等（如圖8）。兩國在形體操作關係上的比較如表11。

表 11 兩國教材中形體操作與關係的比較

類別	臺灣	芬蘭
平面鋪設	三角形 形狀	以一個或兩個三角形進行 凸多邊形、凹多邊形
相似全等	全等	相似與全等
平移、翻轉、旋轉	×	平面和立體形體的翻轉與旋轉
對稱	線對稱	線對稱、點對稱

註：1. 「×」表示未出現，兩國在「形體切割重組」項目類似（針對凸多邊形），故不比較。

2. 臺灣六年級仍未出現形體的平移、翻轉與旋轉。

6 下面哪些是線對稱圖形？哪些不是？
 拿出附件來檢查，把是線對稱圖形的對稱軸畫出來。〈配合附件九〉



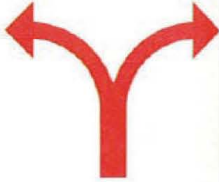
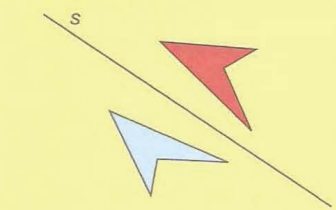
(1)  (2)  (3) 

圖 7 臺灣康軒數學辨別線對稱圖形事例

資料來源：楊瑞智主編（2010c：120）。

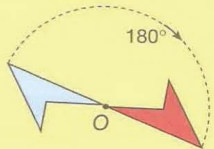
Reflections and congruence

Reflection in a line



The figures are reflections in a line if the figure covers its reflection after the paper has been folded along the line.

Reflection about a point



The figures are reflections about a point if the shape covers its reflection, when the paper is rotated 180° about that point.

Figures which have the same shape and size are congruent.
 Reflections are always congruent.

圖 8 芬蘭 WSOY 數學對稱圖形事例

資料來源：Saarenlainen (2007: 84).

4.空間幾何

此類目是指幾何的空間概念，包含物體空間中的相對位置，以及二維與三維形體間的轉換。兩國在此類目所占的比例都很低（臺灣8.2%，芬蘭10.1%），可見空間概念都不是兩國幾何教材的焦點。在「描述形體位置、方位和座標」上，臺灣的問題貼近學生的生活經驗，係利用教室座位做為情境，但是此問題僅出現在一年級。芬蘭在此類目的問題較多樣化，分別以學生觀察物品情境圖、校園俯視圖和立體積木堆疊的方式呈現。學生必須觀察圖片裡的情境，覺察物體的相對關係，無論是上下、左右或前後，教材內容皆有涵蓋（如圖9），而臺灣沒有類似的問題。雖然兩國透過不同的方式來介紹空間概念，但臺灣在教材中明確出現上下、前後、左右和遠近等詞彙，但芬蘭教材中並未出現這些詞彙。另外，芬蘭在四年級介紹座標系統，而臺灣幾何教材中則未涉及座標概念。

在「從平面表徵、辨識與建造立體圖形」上，臺灣到五年級才有比較詳盡的介紹，包括正方體、長方體、柱體與球體的構成要素，以及正方體與立方體的透視圖與展開圖。相較臺灣比較制式的介紹方式，芬蘭在此類目的呈現比較多元，不僅強調判斷組成立體圖形的平面圖形、平面圖形折疊成立體圖形等，激發學生平面與立體轉譯的能力，同時也呈現不同形體的透視圖（四年級），以增進學生理解平面與立體圖形之間的關係。兩國在此部分的比較如表12。

5.幾何形體之解題

此類目是指透過測量將幾何形體性質量化，並歸納其性質特徵而形成公式來進行解題。從表8來看，臺灣明顯比芬蘭重視幾何量的測量與計算（臺灣占24.4%，芬蘭占10.5%）。在「幾何形體的測量」上，兩國僅考慮規則圖形的測量，包括邊長、面積、角度、體積。以面積來說，臺灣提供圖形板、古氏積

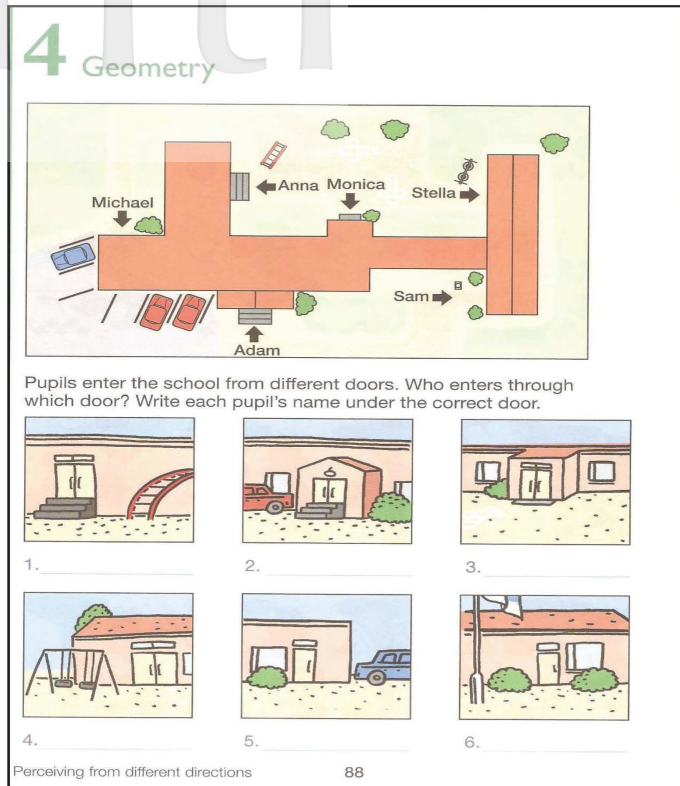


圖 9 芬蘭 WSOY 數學空間幾何事例

資料來源：Saarenlainen (2009b: 88).

表 12 兩國教材中辨識與建造立體圖形的比較

類別	臺灣	芬蘭
展開圖	✓ (正方體、長方體)	×
透視圖	柱體 ✓ (正方體、長方體)	✓ (三角柱、四角柱、五角柱、六角柱)
	錐體 ×	✓ (三角錐、四角錐)
剖面圖	✓ (球體)	×

註：1. 「✓」表示有出現，「×」表示未出現。

2. 臺灣六年級仍未出現椎體的透視圖，芬蘭六年級有出現形體的展開圖 (6A)，但剖面圖仍未出現。

木、其他個別單位三種方式進行面積測量，芬蘭則多以點數圖形版的方式進行。角度測量方面，兩者皆使用量角器來進行角度量測，只不過，芬蘭還多了「估測」這個方式。

在「幾何形體公式的推演與應用」上，由於臺灣教材內容提到較多的形體公式，因此運用公式解題部分的問題明顯比芬蘭還多，但偏重在計算解題的部分。兩者公式發展皆從三年級開始，運用公式解題的問題數隨著年級而逐漸增加，臺灣在五年級最多。臺灣教材中介紹形體的公式較芬蘭多，兩國教材中都出現了正方形和長方形的周長與面積公式、三角形和平行四邊形的面積公式，除此之外，臺灣還多出正方體、長方體的體積公式和表面積公式、梯形的面積公式等。

（三）臺灣與芬蘭幾何教材編排之特色

研究者整理出以下幾點來說明兩國在幾何教材內容編排上的異同：

1. 內容編排脈絡

臺灣與芬蘭幾何教材的編排，大致以認識形體、發現性質、空間推理、公式推衍為脈絡，儘管兩地同一個概念所出現的時間點略有差異，但整體編排架構符合van Hiele幾何思考模式的發展，亦即從視覺辨識開始，到逐漸掌握形體性質、培養空間感，到最後進行解題。但仍有部分內容與編排順序上有些許的差異。例如：芬蘭二年級即出現線對稱圖形，臺灣則在五年級才出現；臺灣圓的定義出現在三年級，芬蘭則在四年級。此外，芬蘭四年級呈現座標系統，五年級介紹相似概念，而臺灣在五年級之前並未呈現類似概念；臺灣出現長方體與正方體的體積公式和表面積公式等問題，芬蘭則沒有相關的問題。至於幾何概念呈現的時間點，以及呈現哪些幾何概念與其順序等議題，則或許可以從課程編製的哲學或理論依據進行進一步的探討。

2. 數學問題呈現

芬蘭數學問題的呈現，鮮少做文字說明，即便是形體組成的定義，或是形成公式，都以圖示與簡單文字直接敘述，沒有太多推衍的過程，具有「重圖示輕文字說明」的特性。臺灣的數學問題，經常透過圖解的文字說明給予提示與統整，尤其當题目的解法不是唯一的時候，則會將所有可能的解法一起呈現，以提供教學者和學習者思考解題時的參考。

3. 加深、加廣的延伸問題

兩國幾何教材中均有加深、加廣的延伸問題。以臺灣而言，學習廣角、數學步道的設計內容以學生學過的數學概念再加以應用，將數學與生活結合或呈現更靈活的數學問題（如圖10）。芬蘭教科書在每個單元最後都有類似腦力激盪的延伸問題，這些延伸問題不受限於只編排在幾何單元，即使是非幾何單元，延伸題內容還是有許多的問題與幾何概念有關。例如：4B第三單元「乘法運算」最後的延伸問題，圖片中呈現各種不同的平面圖形，每個圖形都有A、B兩點，將圖片中的A點摺向B點，則原來的圖形會成為新的圖形（如圖11）。腦力激盪的延伸問題，提供學生進一步探究與思考的機會。

伍、結論與建議

一、結論

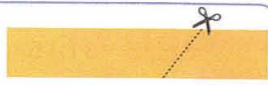
芬蘭學生在國際測驗上優異的表現，以及臺灣學生在幾何測驗上較差的表現，引發本研究進行兩國幾何教材的比較，希望藉由跨國的分析比較來檢視我國幾何教材的特色或不足之處，做為後續教科書編修或教師幾何教學時之參考，使學生未來在幾何學習上有更好的表現。從整體幾何教材的目標來看，臺灣和芬蘭都在「幾何形體組成性質與應用」占的比例最高，在「空間幾何」的

活動三 四邊形 配合習作53

1 在長方形紙上直直的剪一刀，並且剪斷，可以剪成哪兩種圖形？〈配合附件十二〉

在可以剪成的圖形 裡打√，並畫畫看，你是怎麼剪的。

例如： 兩個梯形



兩個三角形



兩個長方形



一個三角形和一個梯形



一個正方形和一個長方形



一個三角形和一個五邊形



試試看，還有其他的剪法嗎？

圖 10 臺灣康軒數學延伸題事例

資料來源：楊瑞智主編（2010b：63）。

比例最少，而所占比例差異最大的是在「幾何形體之解題」的部分。若從兩國幾何目標分布的情形來看，芬蘭幾何目標的分布較為平均，除了空間幾何外，其餘目標平均分布於四個類目中；而臺灣的幾何目標則集中在「幾何形體辨識與建置」、「幾何形體組成性質與應用」和「幾何形體的操作與關係」三個類目，較忽略幾何形體的解題與空間幾何兩部分。不過，每項目標所涵蓋的範圍並不相同，因此在引用本發現時宜謹慎行之，但透過目標的計數與歸類，仍可對兩國幾何教材目標的分布有所理解。

從幾何問題的分布來看，兩國幾何問題分布最多的是在「幾何形體之辨識與建置」類目，而且此類目的問題大都集中在一、二年級教材中。兩國在

1. The shapes are folded so that A folds over onto B. What kind of shape is formed? Write the letter of the original shape by each folded shape below.

Folded shapes

Brain-teasers 80

圖 11 芬蘭 WSOY 數學延伸題事例

資料來源：Saarenlainen (2009e: 80).

「幾何形體之操作與關係」問題上占的比例差異最大，顯示芬蘭幾何問題較著重於透過幾何形體的操作去瞭解幾何概念之間的關係。不過，臺灣在「幾何形體之解題」問題所占的比例比芬蘭高出13.9%，尤其在「幾何形體公式的推演與應用」部分，臺灣的幾何教材問題涉及的範圍和圖形，都比芬蘭的內容多且廣。臺灣在此部分比芬蘭多的，包括正方體、長方體體積公式和表面積公式、梯形面積公式，以及複合形體面積和體積等問題。可見臺灣的幾何教材和芬蘭

比較起來，較重視幾何形體面積與體積的計算。這結果和兩國在此類目標上的分布情況明顯不同，例如：臺灣「幾何形體之解題」的目標，占全部目標的13.3%，但幾何問題卻占了全部的24.4%；芬蘭在此類目標占了23.5%，但問題卻只占10.5%。這顯示兩國幾何教材的目標和問題之間，所占的比例都有不一致的情形存在。而這是否是因為目標所涵蓋範圍大小不同所造成計數上的落差，值得進一步探討。

最後，從幾何問題分布的情況來看，臺灣一至五年級的數學教材中，幾何問題超過全部問題的20%（芬蘭占的比例不足10%），並有隨著年級的增加而增加的趨勢，幾何問題的呈現也多採用圖解、文字說明等方式，並提供多種的解題方法。高比例的幾何問題和多元呈現的方式，為什麼會造成學生在國際測驗中，幾何表現叫不如預期？是否是因為對於空間概念建立的不足，或是因為目標和問題之間的不一致性，或是來自其他教學上的問題，值得進一步探討。

二、建議

根據本研究的發現，提出三點建議，提供未來關於教師教學、幾何教材內容編修或從事後續研究的參考方向。首先，建議教師教學時增加操作活動的設計，並增加「圖形平移、翻轉、旋轉關係」之教學活動，因為臺灣幾何問題屬於幾何形體操作類目的僅有10.7%，而芬蘭則高達27.2%。其中，臺灣在小學一至五年級幾何教材中，完全沒有屬於「圖形平移、翻轉、旋轉之關係」的相關問題。但幾何形體的辨識和形體組成性質，都需要藉由觀察、感覺、建造、分解等實際操作的方式來加強。因此，教材應提供學生實際操作的機會，並多開發不同的教具，使學生能有多元的操作刺激，強化學生對於幾何形體概念的理解。

其次，建議在幾何教材中增加空間概念之相關內容或問題，因為空間概念的學習有助於培養學童發展空間感，建立完備的空間能力，是幾何課程重要核心之一（莊月嬌、張英傑，2006）。但是，從分析的結果來看，臺灣在「空間概念」類目上的幾何目標和問題數最少，所占比例最低。雖然芬蘭幾何教材中「空間概念」問題所占比例也最低，但其中方位的介紹頗具特色，除了物體上下左右相對關係的編排之外，還利用俯視圖、側面圖，以及座標系統來強化學生物體相對位置關係的空間能力。而臺灣教科書僅在一年級提及簡單的相對位置介紹，例如班級座位在誰的左邊、排隊排在誰的後面等，此後未再出現相關的問題。在過去針對臺灣、中國和香港的幾何教材分析中也發現，臺灣空間概念的問題最少，呈現方式較不多元（徐偉民、林美如，2009）。可見空間概念相關問題太少、深度不足的問題值得關注，建議未來教材編修時可以增加空間概念的問題，並加強其深度與廣度，以利學生空間能力的發展。

最後，建議後續研究可探討臺灣幾何教材內容呈現方式對於學生幾何概念學習的影響。在數學課程相關的研究中都指出，教科書內容的呈現方式與特色，是影響學生數學學習表現的關鍵因素之一（Remillard, 2005; Stein et al., 2007）。臺灣幾何教材中不同於芬蘭教材呈現的方式，例如呈現多元的思考與解題歷程、幾何問題所占比例逐年增加、重視幾何公式的應用，以及問題著重在幾何形體公式的應用與計算等，這些特色對學生的幾何概念的學習產生什麼樣的影響，值得未來進一步的探討。

【備註】

本研究分析之康軒版和WSOY版數學教科書，目前已有更新版，更新版內容可能與本研究分析版本內容略有不同。

本文改寫自董修齊（2011）。臺灣與芬蘭國小數學教科書幾何教材內容之分析比較。國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。

參考文獻

- 王文科 (2002)。教育研究法。臺北市：五南。
- [Wang, W.-K. (2002). *Educational research*. Taipei, Taiwan: Wunan.]
- 王石番 (1991)。傳播內容分析法：理論與實證。臺北市：幼獅。
- [Wang, S.-F. (1991). *Content analysis of communication studies: Theory and practice*. Taipei, Taiwan: Youth Cultural.]
- 吳麗玲、楊德清 (2007)。臺灣、新加坡與美國五、六年級分數教材佈題呈現與知識屬性差異之研究。國立編譯館館刊，35 (1)，27-41。
- [Wu, L.-L., & Yang, D.-C. (2007). The study of differences on fractions in the textbooks among Taiwan, Singapore and U.S.A.. *Journal of the National Institute for Compilation and Translation*, 35(1), 27-41.]
- 徐偉民 (2011)。數學課程實施：一位國小資深教師的個案研究。科學教育學刊，19 (2)，101-122。
- [Hsu, W.-M. (2011). A case study: How did an experienced teacher implement mathematics curriculum in her classroom? *Chinese Journal of Science Education*, 19(2), 101-122.]
- 徐偉民、林美如 (2009)。臺灣、中國與香港國小數學教科書幾何教材之內容分析。彰化師大教育學報，16，49-75。
- [Hsu, W.-M. & Lin, M.-J. (2009). A content analysis of geometry materials in elementary mathematics textbook of Taiwan, China and Hong Kong. *Journal of Education: National Changhua University of Education*, 16, 49-75.]
- 徐偉民、徐于婷 (2009)。國小數學教科書代數教材之內容分析：臺灣與香港之比較。教育實踐與研究，22 (2)，67-94。
- [Hsu, W.-M., & Hsu, Y.-T. (2009). The content analysis of algebra material in the elementary mathematic textbooks of Taiwan and Hong Kong. *Journal of Educational Practice and Research*, 22(2), 67-94.]
- 康軒教育網 (2011)。關於康軒經營成果。2011年3月23日，取自 http://www.knsh.com.tw/about/about.asp?go_Sub_Topic=08
- [Educational Web of Kang Hsuan (2011). *About the management results of Kang Hsuan*. Retrieved March 23, 2011 from http://www.knsh.com.tw/about/about.asp?go_Sub_Topic=08]

- 陳之華 (2007)。學習，可以非常生活化。2010年3月7日，取自<http://tw.myblog.yahoo.com/yolanda-chen/article?mid=5277&prev=6603&next=3891&l=f&fid=26>
- [Chen, C.-H. (2007). *Learning could be connected with daily life*. Retrieved March 7, 2010, from <http://tw.myblog.yahoo.com/yolanda-chen/article?mid=5277&prev=6603&next=3891&l=f&fid=26>]
- 陳仁輝、楊德清 (2010)。臺灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。《科學教育學刊》，18 (1)，43-61。
- [Chen, R.-H., & Yang, D.-C. (2010). Comparing 7th grade algebra textbooks used in Taiwan, U.S.A. and Singapore. *Chinese Journal of Science Education*, 18(1), 43-61.]
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛 (2005)。中小學數學科數學綱要評估與發展研究報告書。臺灣之1至12年級數學綱要的一貫性與銜接性研究，以及和美國加州、英國、新加坡、日本、中國大陸、南韓之跨國比較。臺北市：教育部。
- [Chern, I.-L., Shan, W.-C., Horng, W.-S., & Yuan, Y. (2005). *National reports: The study of guideline of mathematics standards among Taiwan, California, England, Singapore, Japan, Mainland China, and Korea*. Taipei, Taiwan: Ministry of Education.]
- 莊月嬌、張英傑 (2006)。九年一貫課程小學幾何教材內容與份量之分析。《國立臺北教育大學學報》，19 (1)，33-66。
- [Chuang, Y.-C., & Chang, Y.-C. (2006). An analysis of content and quantity of geometry textbooks for elementary schools in the nine years curriculum. *Journal of National Taipei University of Education*, 19(1), 33-66.]
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：作者。
- [Ministry of Education. (2003). *The learning domain of mathematics of grade 1-9 curriculum guidelines*. Taipei, Taiwan: Author.]
- 楊瑞智 (主編) (2009)。國小數學1上。臺北市：康軒文教事業。
- [Yang, J.-C. (Ed.). (2009). *Mathematics 1A*. Taipei, Taiwan: Kang Hsuan.]
- 楊瑞智 (主編) (2010a)。國小數學2下。臺北市：康軒文教事業。
- [Yang, J.-C. (Ed.). (2010a). *Mathematics 2B*. Taipei, Taiwan: Kang Hsuan.]
- 楊瑞智 (主編) (2010b)。國小數學4下。臺北市：康軒文教事業。
- [Yang, J.-C. (Ed.). (2010b). *Mathematics 4B*. Taipei, Taiwan: Kang Hsuan.]
- 楊瑞智 (主編) (2010c)。國小數學5下。臺北市：康軒文教事業。
- [Yang, J.-C. (Ed.). (2010c). *Mathematics 5B*. Taipei, Taiwan: Kang Hsuan.]

楊德清、施怡真、徐偉民、尤欣涵 (2011)。臺灣、美國和新加坡小一數學教材內容之比較研究。《課程與教學季刊》，14 (2)，103-134。

[Yang, D.-C., Shih, I.-C., Hsu, W.-M., & Yu, H.-H. (2011). The comparing study of first-grade mathematical textbooks for Taiwan, America and Singapore. *Curriculum & Instruction Quarterly*, 14(2), 103-134.]

歐用生 (1991)。內容分析法。載於黃光雄、簡茂發 (主編)，《教育研究法》(頁229-254)。臺北市：師大書苑。

[Ou, Y.-S. (1991). Content analysis. In K. H. Huang & M. F. Chien (Eds.), *Educational research* (pp. 229-254). Taipei, Taiwan: Shia Ta Book.]

歐用生 (1994)。《教育研究法》。臺北市：師大書苑。

[Ou, Y.-S. (1994). *Educational research*. Taipei, Taiwan: Shia Ta Book.]

鍾靜 (2005)。論數學課程近十年來之變革。《教育研究月刊》，133，124-134。

[Chung, C. (2005). Analyzing mathematics curriculum evolving of Taiwan in ten years. *Journal of Education Research*, 133, 124-134.]

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Grouws, D., Smith, M., & Sztajn, P. (2004). The preparation and teaching practice of U.S. mathematics teachers: Grades 4 and 8. In P. Kloosterman & F. Lester (Eds.), *The 1990 through 2000 mathematics assessments of the national assessment of educational progress: Results and interpretations* (pp. 221-269). Reston, VA: NCTM.

Lloyd, G. (2008). Curriculum use while learning to teach: One student teacher's appropriation of mathematics curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 63-94.

Lott, J. W., & Souhrada, T. A. (2000). As the century unfolds: A perspective on secondary school mathematics content. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 96-111). Reston, VA: NCTM.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzales, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003*

- international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- National Board of Education [NBE] (2004). *National core curriculum for basic education 2004*. Retrieved February 14, 2010, from http://www.opf.fi/english/publications/2009/national_core_curricula
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Nicol, C., & Crespo, S. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 331-355.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2001). *Knowledge and skills for life: First results from PISA 2000*. Paris: Author.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris: Author.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2007). *PISA 2006 results: PISA 2006 science competencies for tomorrow's world executive summary*. Retrieved February 14, 2010, from http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2987,en_32252351_3223573111111,00.html
- Pehkonen, E. (2009). *Problem solving in mathematics education in Finland*. Retrieved November 16, 2009, from <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/PEHKON.pdf>
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London: Rouledge & Kegan Paul.
- Remillard, J. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics

- curricular. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246.
- Saarenlainen, P. (Ed.). (2006). *Laskutaito 1B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarenlainen, P. (Ed.). (2007). *Laskutaito 5A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarenlainen, P. (Ed.). (2009a). *Laskutaito 2B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarenlainen, P. (Ed.). (2009b). *Laskutaito 3A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarenlainen, P. (Ed.). (2009c). *Laskutaito 3B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarenlainen, P. (Ed.). (2009d). *Laskutaito 4A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarenlainen, P. (Ed.). (2009e). *Laskutaito 4B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Son, J., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the U.S.A. and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 117-142.
- Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.
- Tarr, J., Reys, R., Reys, B., Chavez, O., Shih, J., & Osterlind, S. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 247-280.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 609-626.