

從學生數與量部分的數學寫作分析一位國小老師的數學佈題

劉祥通、鄔瑞香、黃瓊儀

本研究從三位學生的數學記錄簿，分析一位老師在現行課程(國立編譯館六十四年版)進行三、四年級的數學教學的佈題方式、三位學生數學記錄簿裡的解題表現、以及分析這位老師的佈題意圖。本研究採用內容分析法與訪談法，研究資料是上、中、下三位不同程度學生長達兩年的數學記錄簿。研究者先將相類似的教學佈題呈現在一起，然後訪談巫老師當初佈題的教學情境，期能透過如此的交叉檢定法，以掌握到巫老師的數學佈題意圖。然後歸類其佈題類型，總結其佈題特色，並引伸出數學教學與評量的意見。

關鍵字：佈題、解題、數學寫作、內容分析、佈題意圖

Key words: Problem Posing, Problem Solving, Mathematics Writing, Content Analysis, Posing Intention.

壹、研究動機與目的

國內數學教學雖然有新課程的全面實施，而採用傳統偏重計算算則的數學教學仍然隨處可見，能掌握新課程的精神與改革動向的老師並不多見，甚至有人質疑這樣的課程或教學是否有效與可行，而此台北市某一所國小老師(稱之為巫老師好了)早在民國 81 年 9 月至 83 年 6 月，爲了讓學生對於學習有深刻的反省，接受台大數學系朱建正教授的建議，實施數學寫作的活動(數學日誌)以提供學生省思發表的園地，希望學生藉著寫作而使學習所獲得的心得更加組織化與精緻化，因此巫老師要求學生每個單元結束後寫下它們的心得與反思，她的三位學生(甄、牟、汪)的數學寫作持續寫了兩年(三、四年級)是個很好的題材，三位學生兩學年共寫了 10 多本

從學生數與量部分的數學寫作分析一位國小老師的數學佈題

的數學寫作記錄，限於篇幅的關係，本文只從這三位學生數學寫作記錄的數量部分加以分析巫老師的佈題教學。

巫老師利用上課時佈了一些數學題目，並採用小組合作討論教學法，讓學生操作、發表、討論然後要求學生回家後將其想法寫在數學寫作記錄上。從學生的數學寫作裏可以發現巫老師所佈的數學題目，也可以看到學生小組合作解題時所採用的解題策略，以及所發表的省思活動，也可以發現巫老師根據學生的表現給學生加上註解、再次佈題、或正面的回饋。因此本研究的目的是：從三位學生的數學寫作記錄，探討巫老師數學教學的佈題意圖，歸類其佈題類型，總結其數學教學特色，並引伸出教學與評量的問題。

貳、文獻探討

根據上述的相關問題，文獻的探討分成數學佈題、數學寫作的意義、數學寫作的功能、與數學寫作活動的實徵研究。

一、數學佈題

佈題的定義很廣，依據國內學者梁淑坤(1994)將佈題(problem posing)依出題者的不同目標而加以區分為教學佈題、學生擬題、和老師命題。本文所指的「佈題」是針對而教學佈題而言，所謂教學佈題是指教師針對某一特定的教學目標所設計的教學問題。許多的數學教育學者將教師佈題視為一種教學技巧，透過佈題可幫助學童理解問題，產生解題動機，進而成功的解題。教學的佈題的目的是在引導學生創塑數學的意義(make sense of math)，並且用此創塑的數學符號來溝通，且合作共同解題(林文生,1996)。例如，在小學二年級的教材有個這樣的題目，一隻青蛙4條腿，2隻，3隻，5隻，8隻，13隻青蛙各有幾條腿？假使老師教學使用九九乘法策略解題，是能解2隻，3隻，5隻，8隻青蛙的腿數，但是對於13隻青蛙的腿數是多少就會束手無策，何況教學目標並沒有要學童以乘法策略解題。若

從學童的自然解法分析，我們可以發現他們絕大多數使用連加法解題，這時老師如果能請使用累加法策略的學生發表，或請其他學童試圖說明此法之優點，那麼學童會慢慢地學會把已習得的經驗或知識應用到新的情境，於是 13 之青蛙的腿數可以 5 隻與 8 隻的腿數加成而得。如此的教學安排可謂佈題的技巧，佈題的目的不外是銜接舊經驗，或是發展新觀念，老師適當的數學佈題是可以幫助學童建構數學。

教學佈題以幫助學生建構數學對於很多老師是蠻難的，但是老師們可以從分析教材著手，多半老師都把教科書當作「聖經」，上課時很忠實地遵照教科書的教學流程，其實教科書的活動流程是需要調整或修改的，例如，國立編譯館編著的小學數學第二冊，數和錢幣的單元有以下的教學活動，請學小朋友拿出 56 枝吸管做做看。把 10 枝捆成一捆，可以捆幾捆？還有幾枝？然後下一個活動是數 62 枝吸管，在下一個是數 26 枝吸管。而此類教學活動的目的是要讓學生從活動中獲得 56 這個數是由 5 個「十」和 6 個「一」組成，62 這個數可由 6 個「十」和 2 個「一」組成。同理 26 這個數可由 2 個「十」和 6 個「一」組成的觀念。然而在班級教學中要讓全班同學數那麼多吸管，教室常規是不容易掌控的，老師若不針對課本活動稍加調整，亦即是重新佈題，那麼上課時數一定不夠。至於要怎麼調整呢？26 枝吸管的活動可以放在 56 枝，或 62 枝的活動之前，或者說學生完成了 26 枝吸管的活動之後，絕大多數的學生都能達成教學目標，那麼「26 枝吸管的活動」就可省略一些，改由直接追問學生 26 到底是由幾個「十」和幾個「一」合成的？如此，一方面是節省教學活動時間，一方面是請學生「預測」活動結果，藉以檢驗學生是否達成教學目標。

二、數學寫作的意義

近年來，美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics) (NCTM,1989)出版的「數學課程與評鑑標準」(Curriculum and Evaluation Standards for Schools Mathematics)一書推薦，將數學寫作活動融入數學教學中。該書認為數學教學應強調有意義的溝通，數學觀念的寫作可幫助學生

釐清他們的想法，與加深他們既有的觀念。關於寫作，一般教育工作者直覺的反應是語文科的活動，何以能行之於數學的活動呢？Azzolino(1990)強調：人類一直用寫作的活動來學習數學，數學家以寫作讓世人了解其想法，經由論文、與期刊的發表呈現與其同道共享；數學教學者爲了學生的學習與自己的教學，也必需透過課堂的筆記、教案的編寫、與教科書的編撰來達成。由此可知，寫作的確在數學的傳播上佔有相當重要的地位。

數學是一種包含一般語言(ordinary language)、術語(technical vocabulary)、定義(definitions)、符號(symbols)、模型(models)、流程圖(charts)、圖表(graph)、圖形(diagrams)、規則(rules)與程序(procedures)的語言。以此種語言溝通需要對數學語言有深入的了解(Lappan & Schram, 1989)，而數學寫作正好能提供老師掌握學生對數學語言的了解程度。爲了反映「數學課程與評鑑標準」的精神，數學課程的內容與教學實踐(instructional practices)也隨之調整，其中在教學實踐上特別強調「數學的寫作」(writing about mathematics)，而不強調過去的「使用習作簿」(use of worksheets)、或「紙筆操作的靜態工作」(paper-and-pencil manipulative still work)，這樣的轉變其實就是從過去的「反覆練習」改變爲強調「溝通與統合」的訓練。

Miller(1991)指出寫作是主動的學習過程，它能促進學生程序性與觀念性的了解；學生也往往在寫作的時候才發現自己在想什麼？學到了什麼？什麼是重要的？寫作也有助於學生組織與整理數學概念，並且在一些觀念中尋找關連，尤其是聯結直覺的想法、數學語言、與抽象符號。據此，筆者認爲凡是促使學習者解釋、省思、回顧、組織、或連結數學的書寫與記錄的活動，均可謂之「數學寫作活動」。

三、數學寫作的功能

建構主義論者 Vygotsky，在探討神經系統參與記憶行爲之後指出：參與活動的器官越多，接受的印象越深刻，形成的記憶也就越深刻和完整，因此他主張教師在教學的過程中應盡量促使學生的各種器官參與活動，這樣學生的記憶就會更加深刻，所獲得知識也會更全面、更牢靠(張佩真譯

，1993)。Piaget 也說每個行為或多或少都有意識存在，一個行為，或許有意識，但沒有經過整合的這種意識稱之為「初等意識」，以自己為例，當他看手錶時若沒有大聲唸出時間或小声喃喃自語則馬上忘記時間。在視覺上他看到手錶確實意識到時間，但由於意識沒有經過整合，不看手錶時意識又消失了(劉玉燕譯，1994)。職是，個體學習時參與學習活動器官愈多，對學習效果的增益也愈大。數學經由寫作活動，會讓更多的感官參與了活動，意識受強化，數學學習會更深刻。

Miller (1992) 倡導以寫帶動學習(writing to learn)的數學學習法，這種學習不只是將知識看成事實與觀念的組合，也不只是將內心已存有的觀念做簡單的轉譯(transcription)而已(Fulwiler, 1982)；而是學習與寫作都看成建造意義的過程，在這個過程中使學習者產生的連結已知的知識與正在學習的知識。就一般寫作而言，胡適曾在「治學的方法與材料」一書中提到：吸收進來的知識思想，無論看書來的，或是聽講來的，都只是模糊零碎，都算不得我們自己的東西。必須做一番手腳，或做提要，或做說明，或做討論，自己重新組織過，申述過，用自己的語言記述過，那樣的知識才算是自己的了(胡適文存，1986, 頁 172)。而數學寫作就是重新用自己的語言記述，可能有些知識真的要寫過之後才算是自己的。

較早 Piaget 即強調在每個領域，都是「行動在先，理論在後」，「先有技術，後有科學」，概念與學說都是從行動所發現的事實理論化得來的，機械工人往往是沒有自覺的物理學家(劉玉燕，1994 譯)。因此寫作活動，有時候也是在行動之後回頭尋求理由，也是在尋求解釋，因為寫作活動是在行動之後尋找理由，因此具有促進學習者思考歷程的自我察覺、反省思考、與主動建構知識的功能；正因為寫作活動涉及解釋活動，所以知識的統整與精緻化也往往在寫作的過程中完成。學習者以新的方式統整知識並精緻化知識時，就是將資訊再加工處理，也是從事建構知識的工作。

寫作鼓勵學生藉著重新閱讀(rereading)與重新檢驗(reexamining)已有的數學概念以重整(reprocess)他們的想法(Bell & Bell, 1985)。Bell 與 Bell (1985) 強調閱讀(reading)只是解讀(decoding)語言的線索(language cue)、口述(spe-

aking)只是隨興(transitory)而不能回顧(reviewing)的、而寫作卻是編碼(encoding)的活動，它提供情境(contexts)使學習與思考得以發生。與閱讀與口述相較，寫作是比較有回顧的活動。

後設認知的技能對數學解題是很重要的，Peterson(1988)強調學生的後設認知能力顯然與他們的學校學習有密切的關係，但是許多學生往往未察覺他們自己的學習與記憶的過程，以致忽視他們已知那些與未知那些。Garofalo(1986)亦強調：老師應藉著自己控制決定與行動的機會展現給學生觀摩，以幫助學生發展控制與調整的能力。同時 Shoenfeld(1987)認為老師應讓自己心理內在的計畫、監控、與評估解答的過程透明化，使學生了解其中的奧秘。因此老師提供的數學問題或作業，如能使學生產生省思、分析、或陳述的活動，將有助於後設認知(Metacognitive)能力的發展(Garofalo, 1987)。而寫作活動就是製造機會讓學生產生省思、分析、或陳述的活動(劉祥通、周立勳，1997)。

參、數學寫作活動的實徵研究

Swing 與 Peterson(1988)作解釋性的研究後發現：寫作有助於連結觀念(concepts)程序、符號、及具體圖像，連結一般的觀念、程序、與特定的例子，連結新知識與先前經驗，連結實體世界與數學術語及符號(mathematical terminology & symbols)，對於數學的了解有莫大的幫助(P. 54)。Anderson(1995)的研究也指出：學生若能把過程用不同脈絡地詳細敘述，能增進理解與保持學習效果。學生學習數學時，老師與他們詳細地探討解題過程，那麼學生就較有可能發展概念性的了解，且在寫作的作業上就會跟著有解釋性的說明。

但是，許多研究卻發現：學生的解釋性的數學寫作大部分偏重在對於程序或演算法的說明，很少是有效的闡釋或說明(Miller, 1990；Venne, 1989；Waywood, 1992)。Shield 與 Galbraith(1998)的研究要八年級學生作解釋性的數學寫作結果發現：學生的作品與課本的呈列次序是平行的，且大部

分是作程序性的描述且很少解釋可以這樣做的原因。魏宗明、劉祥通(1997)的研究發現：大多數學生之數學寫作活動只記錄該單元之「教材難易」、「解決算則的程序」、與「學習困擾」等向度而已，能寫下學習心得、數學連結、數學活動後的反思的很少。而巫老師的學生卻很會將心得與感想躍然紙上，是她的教學使然？

肆、研究方法

本研究採用內容分析法(content analysis)與訪談法(interview technique)，旨在從學生的數學寫作記錄中從巫老師的佈題方式、學生的解題表現、訪談巫老師當時佈題的教學情境，然後分析巫老師的佈題教學，進而探討巫老師的佈題特色。

一、研究對象：

巫老師畢業於師範、師專、師院的暑期學士班，與師院暑期研究所四十學分班，她是一位五十出頭，而熱愛數學教學的老師，過去曾配合幾位教授的國科會研究進行教學的工作，早在數學新課程的實驗教材（八十一學年度部分學校從一年級開始），以及數學新課程（八十五學年全面實施）以前，她在教學中發現以現行舊教材（1975年版）進行數學教學，老師尚須具備很多的奠基工作，學生才可以建立起數學概念，因此之故，她興起了在舊教材裏進行一些數學佈題，以彌補數學概念之不足，然後要學生課後寫下心得與感想，希望從學生的數學寫作記錄中看到成果與獲得教學的回饋；巫老師爲了長期觀察與反省教學的成效，這個班的數學教學，從一年級開始連續四年都是由她指導。

二、研究資料：

巫老師的三位學生在三、四年級時(81年9月至82年6月、82年9月至83年6月)的數學寫作記錄。巫老師選擇這三位學生的數學寫作記錄做

為研究資料，主要的考量是這三位學生的數學寫作記錄最完整（有些的學生的記錄有闕漏或遺失），且他們三人算是願意寫。他們現在已是高中二年級，當時該班有 41 名學生，甄生(女)課業表現很好，是班上前 10 名的孩子，喜歡在數學寫作記錄上用圖像畫記以表徵她的數學想法；牟生(男)是個非常內向的孩子，在該班上大概是 15 至 20 名之間，雖然只是中上程度的學生，但是能主動積極地學習；汪生是屬於中下程度的男生，家裡父母期望很高，勤加輔導他的課業，但是他在班上的名次大概是 30 至 35 之間。選三種不同程度學生的數學寫作分析是讓讀者約略知道學生的寫作表現的程度。

三、資料的處理：

分析的資料都是研究者認為能呈現出教學者數學教學知識或數學教學信念的問題，內容的組成包括教師所佈置的問題、兒童所呈現的解題活動、教學者的訪談說明，及研究者的分析。訪談時間是民國八十八年七月二十五日星期日進行。

學生在數學寫作記錄上不見得會把老師所佈的問題記錄下來，為了確認巫老師的佈題題目，研究者從三位學生的數學寫作記錄做資料來源的三角校正 (triangulation) 以確認佈題的題目。為了增強研究的信度，研究者先從個別的佈題活動分析教學者的意圖，然後訪談巫老師當初佈題的情境或動機，將研究者的臆測與教學者的意圖作交叉檢定(cross - check)，以增強分析者的信度(analyst reliability)。唯恐訪談時誘導巫老師回答的方向，巫老師回答時若採用原則性的說明，請她舉實際的例子，避免用「你的意思是『這樣』嗎？」。

為了檢核分析的工具信度 (instrument reliability)，研究者將相類似的佈題問題擺在一起分析，例如，請說明你計算 1653×3 採用的方法，與如何簡化 $9 \times 12 + 90 \times 12 + 900 \times 12$ 的計算結果，此兩個佈題的意圖都是幫助學生瞭解直式乘法演算法的意義，分析時研究者將此兩題並置，以提高數學寫作記錄所提供的工具信度。最後資料的呈現大致分成老師佈題、學生解

題、教學者的訪談說明，與研究者的分析，簡要地以佈題、解題、訪談與分析作為小標題。

伍、研究結果

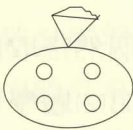
爲了探討老師的佈題方式，佈題意圖與學生的解題表現，研究者從學生的數學寫作記錄摘錄巫老師的「佈題」與學生的「解題」，爲了忠實地呈現學生寫作的原貌，縱使學生用字遣詞生硬，研究者並未加以修飾；其次在學生解題後面加上「訪談」巫老師的對話，藉由「訪談」以探討巫老師的佈題意圖或當時的教學情境，最後再加上「分析」的部份，是研究者從巫老師的佈題意圖引伸出數學教學或評量的改進意見，因研究者並未進入教學現場，且教學的實際情況並不是本文所關切的，職是，「分析」時並不討論巫老師的「實然」，而是從佈題的觀點探討教學與評量的「應然」問題。

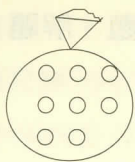
佈題的類型的歸類是從研究者的暫時性假設，再經與巫老師訪談後確立的，佈題類型的劃分，包括：安置情境以診斷或發展概念，認識演算法的意義，促進生活經驗的連結，檢驗使用數學的能力，與詮釋或發現數學關係。以上的劃分難免有重疊之虞，卻是根據巫老師當時佈題的意圖。

一、安置情境以診斷或發展概念

(一)甄生(82.05.11)

佈題：老師介紹過什麼是 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ 等單位分數之後，出了兩個題目給我們分組討論：

1.  弟弟要這包糖果的 $\frac{1}{4}$ ，他從裡面拿了一個，他的拿法對不對？是不是 $\frac{1}{4}$ ？你同意嗎？



2. 姊姊要這包糖果的 $\frac{1}{4}$ ，弟弟馬上從裡面拿了4個，再拿一個給姊姊，他的拿法對不對？爲什麼？你同意嗎？

解題：（略）。

訪談：

「根據過去的教學經驗，有學生對於四分之一的認知是從一堆東西裡面挑出四個，然後又取出其中一個，因此，我安排這樣的題目以診斷學生是否也有這樣的問題。」，巫老師答。

「安排兩題的用意何在？」，研究者問。

「第二個問題比較會出現問題，主要是在診斷第二題的迷思概念。」巫老師答。

分析：

1990年英國倫敦大學學者 Dr. L. Booth 來台演講時指出有許多 11 歲學童對於分數的認識如巫老師所說的那樣，答對者只佔 62%。例如，排成三排四列的 12 顆珠子的三分之一，那 38% 的學童是找出一列三顆珠子之後再圈出一顆珠子（林麗惠整理，1987）。對於學生學習分數而言，分數詞（fraction word）的指示量的多寡對於學童學習的困難度是有不同的，以單位分數的內容或是單位分量爲例，依照難易可以分成以下幾個階段：(1) 離散量的「單一」個物，例如，一盒雞蛋（12 個裝）的 $\frac{1}{12}$ 盒；(2) 離散量的「複數」個物，例如，一盒雞蛋(12 個裝的) $\frac{1}{6}$ 盒；(3) 連續量，例如，一條長 12 公分的繩子的 $\frac{1}{3}$ 是多長？(4) 碎裂個物，例如一盒雞蛋 12 個的 $\frac{1}{5}$ 是多少個?(甯自強,1997)。

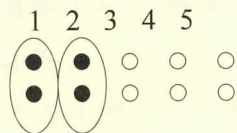
分數詞「四分之一」，學童常會以爲是先拿出四個然後取出其中一個，因此第(1)題對多數學童是沒有什麼問題的，但是第(2)題學童往往無法從 8 個物體中 4 等分，而了解其中一份（2 個）就是四分之一，學生往往只是從 8 個物體中取 4 個，再從 4 個取 1 個。如此學生沒有從另外

的四個個數再找出四分之一，此時老師從補救教學的觀點，有必要追問學生，「你只拿 4 個中的 1 個，那麼另外的 4 個要怎麼處理？」，「那 4 個要不要再拿四分之一呢？」，如此才可以幫助學生學習，否則佈題只能診斷學生的程度而已。

(二) 牟生(82.5.21)

佈題：彈珠有 10 顆，弟弟想要 $2/5$ ，弟弟可得幾顆？

解題： $2/5$ 就是全部分成 5 份，5 份裡面的兩份是要給弟弟的。現在全部彈珠有 10 顆，把它分成 5 份，每份 $1/5$ 就是 2 顆。所以弟弟既然要的是全部 5 份裡面的 2 份，就是每份 2 顆乘以 2 等於 4 顆。



訪談：

「佈這個問題的動機，與上一題的動機是一樣的嗎？」研究者問。

「動機是一樣的，只是這一題的 $2/5$ 是兩個 $1/5$ ，可能要比上一題的 $1/4$ 要難一些，所以我佈此題在後。」，巫老師答。

分析：

現行課本（1975 年版）第六冊數學教科書介紹辨認分數的多寡時是呈現「部分—全體」的圖形，要求學生填答「幾分之幾」，市面上的測驗題目也是一樣，畫幾個圖形，然後把其中幾個圈起來，然後要學生回答圈出來的是全部的幾分之幾，呂玉琴（1996）指出有不少而學生的答案是表徵圈出來的部分佔未圈出來的部分的幾分之幾；當然也有學生的答案是如 Dr. L. Booth 所說的。呂玉琴指出數學新課程（1993 年版）對於分數教材處理的方式，是從量的情境裡複製出 $2/5$ 的量是多少？而巫老師的佈題是早在數學實驗本與數學新課程問世之前，她的教學卻符合了數學新課程的精神。

二、認識演算法的意義

(一)汪生(82.03.17)

佈題：請說明你計算 1653×3 採用的方法。

解題：

$$\begin{array}{r} 1651 \\ \times \quad 3 \\ \hline 3 = 3 \times 1 \\ 150 = 3 \times 50 \\ 1800 = 3 \times 600 \\ \underline{3000 = 3 \times 1000} \\ 4953 = 3 \times 1651 \end{array}$$

訪談：

「這樣的問題上課時有先教過了嗎？怎麼教？」，研究者問。

「爲了讓學生瞭解計算過程的意義，上課時特別要求學生能指出四項乘積的由來。」，巫老師答。

「這個問題是學生對課堂的省思，還是作業指定回答的問題？」研究者問。

「這是與課堂教學相類似的作業題目，請學生在寫作紀錄簿上說明各個分項乘積所代表的意義。」，巫老師答。

「您出這道作業的用意何在？」，研究者問。

「使學生對於演算法的意義有更深刻的認識」，巫老師答。

分析：

雖然上課已解說各步驟的意義，作業方面出這樣的類似題，對學童來說，一點是不困難，至少有樣可學，當然學生「會做」並不代表確切「知道做」，但是如此的作業或多或少可幫助學生對演算法的認識。

(二)甄生 82.9.9.

$$\begin{array}{r}
 9 \qquad 90 \qquad 900 \qquad 108 \\
 \times 12 \quad \times 12 \quad \times 12 \qquad 1080 \\
 \hline
 108 \quad 1080 \quad 10800 \qquad +10800
 \end{array}$$

11988 請問如何簡化？

解題：(略)

訪談：

「佈這個問題的教學情境是什麼？」，研究者問。

「介紹學生三位數乘以二位數的問題的各步驟演算的意義，然後出這一道題在課堂上討論，讓學生反思學過的東西，對於學生來說是個逆向思考的問題。」，巫老師答。

「所謂『逆向思考』是指什麼？」，研究者問。

「我先給各步驟的乘積計算出來，讓學生試著回頭去寫出整個直式乘法的演算過程。」，巫老師說。

分析：

巫老師要學生瞭解 999×12 的演算法是來自於 $9 \times 12 + 90 \times 12 + 900 \times 12$ ，但是，而此題只有程度較好的甄生回應老師的問題，牟生與汪生在記錄簿上寫其他的題材，此題可能只有中等以上程度的學生達到巫老師教學目標的學生。巫老師所謂的逆向思考，對乘法演算法的由來會有更深刻的認識。

三、促進生活經驗的連結

(一)牟生(81.9.21)

心得：喝了好多年的養樂多，現在才知道它的瓶子容量恰好是 1 公合。

……一公升等於 10 公合，量公合要用養樂多瓶，量公升要用鮮奶瓶，養樂多瓶裝了 10 次水，可以倒滿鮮奶瓶。

佈題：一個養樂多的瓶子剛好裝滿一公合，一個鮮奶瓶子，剛好裝滿一公升，請問你還有沒有別種瓶子、罐子或盒子的容量是一公合或

一公升的？

解題：(81.9.30)

我們小朋友吃的布丁盒是一公合，還有媽媽喝咖啡的咖啡壺也是一公升。

訪談：

「關於這個單元，您是怎麼教學？」，研究者問。

「我讓學生實際去做測量活動。」，巫老師答。

「這個部份主要的教學標是什麼？」，研究者問。

「除了課程的目標外，依我過去的經驗，我主要是要發展學生對一公升（合），或一公斤等單位的量感。」，巫老師答。

分析：

牟生在寫作記錄簿上把一公合與養樂多瓶關聯一起，且一公升與牛奶瓶關聯一起了，雖然如此，巫老師爲了加強學生對數學與日常生活的連結，因此追問學生，"還有哪些容器的容量是一公升或一公合的？"牟生後來對於一公合的大小又與布丁盒做了連想，一公升的容量也與咖啡壺的容量關連了。教數學時若能將數學問題與日常生活中的事物作更多的連結，數學對學童來說可以是具體一些的學門，而不那麼抽象。

(二)甄生(83.3.6)

佈題：

爺爺有3個女兒，每個女兒都有2個兒子，爺爺拿出3000元分給孫子，每個孫子可得多少錢？學生的解法大致有兩種，一是 $3000 \div (3 \times 2)$ ，另一是 $3000 \div 3 \times 2$ 。請問(1)加括號和題意有什麼關係？(2)加括號有什麼用意和目的？

解題：

加括號和題意有什麼關係？加括號表示要先算出爺爺共有幾個孫子。加括號有什麼用意和目的？加括號的目的表示要先算，另外也防止把題意搞成 $3000 \div 3 = 1000$ ， $1000 \times 2 = 2000$ 造成答案錯了而且也和題意不配合，所以用 $3000 \div (3 \times 2)$ 計算。

其他：有同學認為也可以寫成這樣： $3000 \div 3 \div 2$

因為爺爺可以先分給 3 個女兒，再請女兒分給自己的 2 個兒子。

有同學說：但是題目的意思是直接拿給孫子呢？還是把錢分給 3 個女兒，再叫女兒分給自己的 2 個兒子呢？也不清楚。

甄生再發問：

所以到底可不可以寫成 $3000 \div 3 \div 2$ ？

訪談：

「出這個問題的目的何在？」，研究者問。

「主要是幫助小朋友四則運算的規約。」，巫老師答。

「過去有特別的教學經驗嗎？」，研究者問。

「我們說先乘除後加減，但是遇到有括號的又要先處理，括號之前有除法，那麼括號內又變號，學生應付不了那麼多規則。」，巫老師答。

「舉實際的例子好嗎？」，研究者問。

「例如 $3000 \div (3 \times 2) = 3000 \div 3 \div 2$ ， $3000 \times (6 \div 2) = 3000 \times 6 \div 2$ 」，巫老師答。

分析：

學生已把老師所安置的兩個數學解答， $3000 \div (3 \times 2)$ 與 $3000 \div 3 \times 2$ ，的情境區分出來，並且也針對 $3000 \div (3 \times 2)$ 與 $3000 \div 3 \div 2$ 所代表的題意的情境有細膩的區隔。

後來學生再追問「到底可不可以寫成 $300 \div 3 \div 2$ ？」，從寫作記錄中學生的清楚解說，老師應提醒她，本題並沒有特別指明要怎麼分，而是問每人分多少的問題。因此，對於有關「加括號」的四則運算問題，對於在這組討論的學生來說他們已與生活中的經驗建立連結了，而不是要靠記憶的四則運算的規則來解題，老師可以利用這組同學記錄下來的例子，給其他同學觀摩，以幫助其他同學對四則運算的瞭解。

四、檢驗使用數學的能力

(一)甄生(83.5.31)

佈題：

請舉例說明：1. 什麼叫做概數？2. 什麼時候會用到四捨五入？3. 什麼時候會用到無條件進入與無條件捨去？

解題：

1. 概數就是大概的數。

2. 四捨五入是把 4 以下的數捨去，5 以上的進入；大概用在買賣東西時。例如，弟弟到文具店買了一枝 93 元的鋼筆，老闆說：「小弟弟真可愛，算你便宜一點，賣你 90 元好了。3 是 4 以下的數利用「四捨」的方法捨去。今年暑假報名參加夏令營的人有 1298 人，爲了計算方便，所以大概約 1300 人，98 是 5 以上的數，利用五入的方法進入。

3. (略)

訪談：

「出此題的用意何在？」，研究者問。

「鑑於許多學生沒有數感，沒辦法做有關大數目的估算」，巫老師答。

「問『什麼時候』使用四捨五入的目的是什麼？」，研究者問。

「爲了檢驗學生是否會用到實際生活。」，巫老師答。

分析：

一般的教學只告訴學生四捨五入到第幾位的方法，然後出計算題或應用題給學生反覆練習，大部分的學童都習得四捨五入的法則，但是能說出「四捨五入的使用時機」的學生並不多，甄生是以編擬問題的情境來分別說明四捨五入、無條件進入與無條件捨去等的用途。

巫老師透過問「時候時候用四捨五入？」的問話，以檢驗學生是否會用，其實也促進學生把四捨五入等概算方法與讓生活連結。

(二)牟生 (82.03.18)

佈題：當你沒有尺的時候如何度量東西的長度？

解題：當沒有尺時，我就拿長 3 公分的迴紋針或長 7 公分的牙籤來測量小物品。那大一點的東西要測量時就用我的鞋子（25 公分）來量了。我的床原來有 8 隻鞋子那麼長，25 公分乘以 8 等於 200 公分。

訪談：

「這一個問題是進入測量單元前的準備活動」，巫老師答。

「目的是什麼呢？」，研究者問。

「爲了檢驗學生對於測量單位的舊經驗，以進入量量看有多長的單元？」，巫老師答。

分析：

這個單元是第六冊第三單元的測量活動，以 15 公分的尺測量桌子的長度，以及公里、公尺與公分等單位的轉換或化聚活動。牟生把巫老師進入單元前的複習活動寫在數學寫作記錄簿，度量物體的長度不外靠著個別單位或普遍單位(公尺、公吋、或公分)來丈量，牟生以迴紋針當作 3 公分，牙籤當作 7 公分，鞋子當作 25 公分當作單位量來測量其他物體的長度，而牟生在此是用個別單位來度量長度。

有關於實測單元的練習問題，坊間或學校出的評量問題是用紙筆測驗方式讓學生練習，例如，若要度量鞋子的大小，下列那個單位最恰當？1. 尺、2. 吋、3. 里。巫老師這個佈題，雖是複習活動，但是可以作爲實作評量的參考。

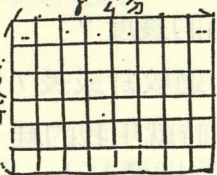
五、詮釋或發現數學關係

(一)甄生(83.5.12)

佈題：爲什麼算面積要長 \times 寬？

解題：插圖(一)、(二)於此

為什麼算面積要長 \times 寬?



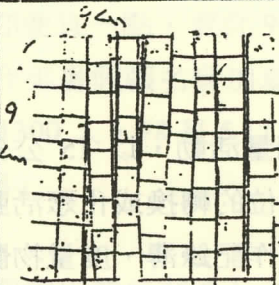
8 \times 6 = 48
48 = 48個正方形面積
→ 一排有8個正方形

加法:
8+8+8 = 24
 $\frac{12}{48}$

→ 8+8+8加了三次剛好是一半, 那
另一半一定也是24平方公分, 所以
加24, 果然, 答案就是48。

一、收集日期: 83年5月12日
二、資料來源:

圖一



9 \times 9 = 81
A: 81平方公分

發現: 因為這片紙和下面
畫的圖一樣, 都是每邊長
9公分, 所以紙可以蓋
那個圖。

一、收集日期: 83年5月24日
二、資料來源:

圖二

訪談:

「課堂先教長方形面積公式，學生寫出課堂所學嗎？」，研究者問。

「學生是在課堂先學了面積公式的由來，但是這題是我出的作業，藉著追問『為什麼？』以檢驗學生是否真正瞭解。」，巫老師答。

分析:

面積的教學首應讓學生瞭解面積的單位、與意義，老師應讓學生用

「覆蓋活動」來比較被測量的物件是幾個「單位」，且看汪生 83.5.24 的寫作就知道巫老師的面積教學，她的確採用「覆蓋」的方法找尋幾個「單位」，但是老師們往往直接或太快告訴學生長方形的面積公式，學童很容易根據此公式計算面積，但不知其來龍去脈，巫老師爲了讓學生探本溯源，藉此佈題驗收學生的學習成果，相信此佈題也應該有促使學生反思過去所學的作用。

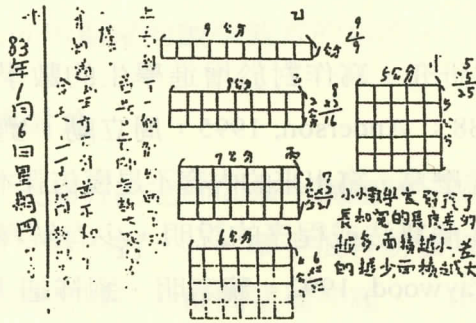
(二)甄生(83.1.06)

佈題：1 請實際剪一條繩子，長 20 公分，圍出下列圖形：

(1) 求出甲乙丙丁戊的面積。

(2) 你發現了什麼？

解題：插圖(三)於此



圖三

訪談：

「請說明一下，您佈這兩個問題的動機好嗎？」，研究者問。

「讓學生實際去探討不同的長方形，然後計算各個面積。」，巫老師答。

「然後您要學生『發現』什麼？」，研究者問。

「其次是希望學生能發現周長相等的各式長方形，其面積可能不相等。」，巫老師答。

分析：

這種佈題可說是開放式的問題「open-ended question」，答案並不唯一，問題也可以被延伸，完成問題的學生應被要求有更周延的答案（Sullivan & Clarke, 1991）。汪生的發現：「就算一樣的繩子弄出來的形狀，他的面積是不一樣的，因為排法不一樣。」，汪生的發現不如老師的期望，不夠完整，他應被要求有更完整或更周延的答案。而甄生在此題有很好的表現，也有很周延的說明，她發現了下列關係：「長和寬的長度差的越多，面積越小，差距越小，面積越大。」

老師遇到學生上述學生的解題差異，可設法安排同儕學習，也就是讓汪生以及其他學生去瞭解甄生的想法，這種利用同儕的學習成果傳播給其他同學瞭解與觀摩，是很有效的教學方法。

陸、討論

根據多位學者的研究，寫作對於增進學生的數學能力有顯著的效果（Swing & Peterson, 1988；Anderson, 1995；周立勳、劉祥通，民 87），但是學生大都不太知道該怎麼寫，寫出來的內容不是模仿課本（Shield & Galbraith, 1998），就是偏重在演算法或程序的說明，少有解釋性的闡釋（Miller, 1990；Venne, 1989；Waywood, 1992；魏宗明、劉祥通, 1997）；相反的，巫老師的學生卻常在數學寫作裡留下「心得」、「發現」、「整理」、「重點」、甚至還「反問」老師，從以上的解題分析可以發現汪生與程度較好的甄生與牟生一樣，不是只敘述演算公式或演算法的程序，已經願意寫、願意想，甚至願意問，這樣的成果除了歸因於台北市的學區社經背景較好、巫老師連續在這班教了四年的數學課以外，是什麼因素使然呢？

一、重視由反思（reflection）而發現的過程

美國數學教學專業標準一書（Professional standards for teaching mathematics）強調專業的教師應選擇有價值的數學課題（Worthwhile mathematical tasks）以促進學生對於數學概念的了解。然而，許多數學教學的重點放在教導

求取答案的公式或算則，卻忽略求取答案的過程，且教師對於解決數學問題的可能活動的知識，卻往往侷限於文化傳承中的一種，如此現象反映出是目前數學教學最大的問題所在(劉錫麒，1993)。

巫老師的數學教學則不然，她善於利用情境以幫助學生對於概念的建立，例如：巫老師給一條 20 公分的繩子，畫出五種不同的長方形，請學生計算面積之後，然後問學生發現了什麼？目的是要學生發現長與寬差距越小的正方形，面積越大。她也善於佈題以誘導學生從不同的路徑中體認演算法的意義，例如： $9 \times 12 = 108$, $90 \times 12 = 1080$, $900 \times 12 = 10800$ ，請問如何合併以簡化？目的是要學生深刻地認識演算法的深層的意義。

Schoenfeld(1992)強調數學教學應以兒童的直觀經驗為素材，希望透過逐步數學化的過程來促進兒童重新發明(reinvent)有關的數學知識，促使學生學到數學化的思考(learning to think mathematically)，巫老師這點的努力似乎是符合了 Schoenfeld 所期望的數學教育的目的。

二、重視自然解法與討論

在數學課室中，大部分的老師問學生問題時，似乎只是問自己，如「一公尺等於 100 公分，對不對？」，學生很容易依照教師所引導的去回答她所要的答案，老師們習慣性地提問這種問題，(Brissenden, 1988, p. 18)稱之為「裝飾性的問題(rhetorical question)」。當然這樣子的教學一定是「一邊上課，一邊講解」，「問問題－學生簡答」佔了大部分的時間。

從學生的寫作也反映出：學生的解題也呈現出許多的自然解法，巫老師也根據他們的自然解法追問學生，請學生解釋或再修正原來的想法，如此，學生為了詮釋他們的自然解法，他要很努力地整理自己的思緒，然後把思考表徵出來，於是教室裡的對話、爭辯、與質疑就在所難免，而對話、爭辯與質疑是激發兒童省思的動力。也唯有透過省思自己的經驗才會產生學習，也才能不斷將自然解法發展成格式化的數學。巫老師的努力是爲了要安排促使學生產生對話、爭辯與質疑的情境。因此，巫老師的問題當然不會只是「裝飾性的問題」，她的教學也不會是「一邊上課，一邊講解

」。

三、重視數學連結與生活應用

數學的連結可以幫助學童搭起具體物與抽象概念之間，以及各種不同表徵方法之間的橋樑；學習數學與使用數學（using mathematics）是學校數學課程很重要的兩個面向（NCTM, 1989, p.32）。學生往往以為數學就是計算，忽視數學的解題與概念的部分，有一個方法可以驅除學生這種錯誤的觀念，那就是提供機會使生活經驗與正式的數學作連結，否則學童會把數學看成只是一些概念的組合（NCTM, 1989, p. 33）。

從學生的數學寫作可以發現巫老師特別重視數學的連結與生活的應用，例如：哪些日常生活的容器之容量剛好是一公升或一公合？加括號與題意有什麼關係？什麼時候使用到四捨五入？當你沒有尺的時候用什麼來度量東西的長度？這些佈題的目的就是促使數學題材與日常生活關聯在一起，並藉著生活的應用以檢驗學習成果。

四、鼓舞學生與豎立標竿

學生為什麼「願意寫」與「樂意寫」？巫老師為了鼓勵學生繼續探討，經常有「再次佈題」出現，例如，還有沒有別的瓶子或罐子是一公合或一公升的嗎？做好以後有沒有驗證看看可行不可行？巫老師每篇日記後面都給學生相當的「鼓舞與勉勵」！例如，「這篇日記，對於同學的作品都有恰當的批評，可見妳更高明」，「○○妳會找問題來證明對或錯可見妳又更進步了」，與「說得頭頭是道，越來越像小數學家了」。

其次，「我想要做什麼樣的數學老師？」，巫老師不斷地這樣省思自己的教學，帶動了她的教學態度的轉變與教學方式的突破（甄曉蘭、曾志華，1997），這樣的自我期許應是她教學成功的另一個主因。

再者，三位學生在記錄簿上這樣寫著：巫老師最欣賞的學生是「1.會檢驗答案，2.錯了再重新算算看，3.努力不懈不怕失敗、接受挑戰不怕失敗，請問你做到了嗎？」，學生如此明瞭巫老師的對她們的期許，這一點

也是學生在課室裡能「解數學」與「談數學」，在課後能「寫數學」的另一個原因。

柒、建議

數學寫作的功用應不限於統整個人的數學經驗，與精緻化自身的數學概念，更應藉由作品的觀摩促進學習的可能。佈題能力的培養不是一蹴可及的，而是長時間的磨練，尤其是要經常省思教學目標與教學活動的一致與否。因此建議給老師參考的兩點淺見如下：

一、多表揚學生作品

由於寫作的過程提供學生以「寫」來表達想法的實際經驗，這樣的經驗培養學生將內在的數學想法表達出來，如此，數學溝通的目的便容易達成。學生在數學寫作之前，必須對數學的知識進行相當程度的思考，並加以組織，方能將已學過的觀念結晶化。而數學寫作的作品一旦完成，不但對他自己日後的數學學習，也對數學概念有困難的同學，具有參考與學習的價值(Johnson, 1983)。

既然數學寫作的功用有多方面的益處，簡單地說，對於學習者而言，可以由省思自己的經驗而產生學習，對於教學者而言，可以豐富了兒童的數學知識，進而提昇佈題能力。另外，學生的優秀作品，可以經由老師的「表揚」而讓更多的學生得到學習，也可以當作下次教學的資源。例如，甄生回答「為什麼面積要長乘以寬？」(83.5.12)、與「什麼時候會用到四捨五入？」(83.5.31)，「加括號與題意有什麼關係？」(83.1.6)這些答案對於許多同學而言都是最近可能發展區(zone of proximal development)的範圍內，不是遙不可及的，只要老師提醒他們，至少還可以「後知後覺」。

二、常省思教學目標與教學活動的關係

許多老師不懂如何催化學習 (facilitating learning) 只是監督學生 (supervising students)，不會在複雜的教學情境下做適當的決定 (making decisions) 只是照本宣科 (performing routines)，不會指引方向 (teaching orientations) 只會傳授基本技巧 (basic competencies) (Sullivan & Mouslev, 1998)。的確，教學是一種複雜的行為，老師要改進自己的教學，是需要經常地反省自己的教學行為。

三位學生在二學年之內分別寫了 10 多本數學記錄簿，在那豐富的記載，可以發現學生的數學學習興趣是很高昂的，當然跟老師的佈題技巧，與班級的討論氣氛有關；經由巫老師的自白得知，好的數學佈題活動，並非垂手可得，而是從經驗與反省中尋尋覓覓的結果 (林文生、鄔瑞香，1999)。巫老師課前花很多時間探索教學目標，然後作教材分析，找出每個單元學生應獲得的概念，也找出哪些教學活動或作業練習不易讓學生獲得概念性的了解，然後作佈題設計，她這種教學方法值得數學教育工作者參考與學習。

致謝：將巫老師班級的數學寫作解析給數學教學者參考，是台大數學系黃敏晃教授的建議，在此表示感謝，最後也感謝巫老師提供資料與耐心的接受訪問。

參考書目

- 呂玉琴 (1996)。數與計算教材設計對分數概念的處理。國立嘉義師範學院八十四學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編。
- 周立勳、劉祥通(1998)。寫作活動對國小數學解題能力的影響。教育研究資訊雙月刊, 6(3), 46-62。
- 林文生 (1996)。一位國小數學教師佈題情境及其對數學解題交互影響之分析研究。國立臺北師範學院國民教育研究所碩士論文：未發表。
- 林文生、鄔瑞香(1999)。數學教育的藝術與實務：另類教與學。台北：心理出版社。
- 林麗蕙整理 (1997)。分數學習的困難。Dr. L. Booth 主講。科學教育月刊, 100, 8-16。
- 胡適文存(1986)。治學的方法與材料(胡適作品集 11)。台北：遠流出版事業股份有限公司。
- 張佩真(1993 譯)。人是教育的對象。台北：五南出版社。
- 梁淑坤 (1994)。擬題的研究及其在課程的角色。國民小學數學科新課程概說 (低年級) (pp. 1

- 52-167) 台灣省國民學校教師研習會編。
- 甯自強(1997)。量的子分割(二)-真分數的引入。 *教師之友*, 38(4), 33-39 頁。
- 甄曉蘭、曾志華 (1996)。建構主義的興起與應用。 *國立嘉義師範學院國民教育研究所學報*, 3, 179-208。
- 劉玉燕(1994 譯)。皮亞傑訪談錄 (Jean-Claude Bringuierm 原作)。臺北：書泉出版社。
- 劉祥通、周立勳(1997)。數學寫作活動－國小數學教學的溝通工具。 *國立嘉義師範學院國民教育研究所學報*, 3, 239-262。
- 劉錫麟(1994)。 *數學思考教學研究*。台北：師大書苑。
- 魏宗明、劉祥通(1997)。 *國小實施數學寫作活動之研究*。彰化師大：第二屆數理教育研討會。
- Anderson, J. (1995). *Cognitive science and its implications*, 4th edition. New York: Freeman.
- Azzolino, A. (1990). Write as a tool for teaching mathematics: The silence revolution. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch, *Teaching mathematics in the 1990s* (pp.92-100). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bell, E. S., & Bell, R. N. (1985). Writing and mathematics problem solving: arguments in favor of synthesis. *School science and mathematics*, 85, 210-221.
- Borasi, R., Rose, B. J. (1989). Journal writing and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 347-365.
- Brissenden, T. (1988). *Talking about mathematics : Mathematics discussion in primary classrooms*. Oxford, England : Basil Blackwell.
- Fulwiler, T. (1982). Writing an act of cognition. In C. W. Griffin (Ed.), *New direction for teaching and learning teaching writing in all disciplines* (pp. 15-36). San Francisco: Jossey-Bass.
- Garofalo, J. (1986). Metacognition knowledge and metacognitive process: Important influences on mathematical performance. *Research and Teaching in Developmental Education*. 2(2), 34-39.
- Garofalo, J. (1987). Metacognition and school mathematics. *Arithmetic Teacher*, 34(9), 22-23.
- Johnson, M. (1983). Writing in mathematics classes: A valuable tool for learning. *Mathematics Teacher*, 76, 117-119.
- Lappan, G., Schram, P. W. (1989). Communication and reasoning: critical dimensions of sense making in mathematics. In P. R. Traffton & A. P. Shulte (Eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (1989 Yearbook of NCTM, pp. 14-30). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Miller, L. D. (1992). Teacher benefits from using impromptu writing prompts in algebra classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(4), 329-340.
- Miller, L.D. (1991). Writing to learn mathematics. *Mathematics Teacher*, October 1991, 516-521.
- Nahrgang, C. L. & Petersen, B.T. (1986). Using writing to learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 79(1), 461-465.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

- Peterson, P.L. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. **Educational Researcher**, 17(5), 5-14.
- Schoenfeld (1992). Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 334-371). New York : Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition ? In A. H. Schoenfeld(Ed.). **Cognitive science and mathematics education** (pp. 189-216), Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Shield, M., & Galbraith, P. (1998). The analysis of student expository writing in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**. 36, 29-52.
- Sullivan & Clarke(1991). Catering all abilities through "good question." **Arithmetic Teacher**, 39(2), p. 14-18.
- Sullivan, P. & Mouslev, J. (1998). Teaching as active decision makers : Acknowledging the complexity of teaching. 八十六學年度國小課程研究學術研討會論文。
- Swing, S. & Peterson, P. (1988). Elaborative and integrative thought processes in mathematics learning. **Journal of Educational Psychology**, 80(1), 54-66.
- Venne, G. (1989). High school students write about math. **English Journal**, 78(1), 64-66.
- Waywood, A. (1992). Journal writing and learning mathematics. **For the Learning of Mathematics**, 12(2), 34-43.
- Wilde, S. (1991). Learning to write about mathematics. **Arithmetic Teacher**, 38(February 1991), 38-42.