

國小教師進行數學討論活動 困難之探討

陳淑娟、劉祥通

本研究的主要目的在於透過合作行動研究，由研究者、一位數學教育學者與一位國小教師合作，進入五年級的教室現場，以探究進行數學討論活動時的困難與所需要的協助。

教師未進行討論教學前的擔心有「時間不夠」、「懷疑學生能力」、「秩序難控制」、與「無法熟練」；這些擔心進行討論教學後發現是可以克服的。而教師實際進行數學討論所發現的困難有「佈題能力」、「原型概念知識」、與「沿著主軸追問的能力」，這些是真正困難之所在，是需要協助的。

所需的協助包括：提供關於數學教材的數學概念知識，並有共同討論與相互扶持的同儕，以增進其不斷練習與成長的動力。

關鍵字：數學討論、國小數學、合作行動研究

Key words: Mathematics, Discussion, Elementary Mathematics, Collaborative Action Research

壹、研究背景與目的

長久以來數學科一直是國小科目中最容易引起焦慮，也是最感到困難的（詹志禹，民 86）。根據鍾思嘉、林青青及蔣治邦（民 80）的研究，隨著年級的增加，學生對數學的興趣愈顯得低落。的確，在許多的數學教室裡，一向只有老師講述公式的聲音，學生是跟著老師後面走的計算器，正確快速的求得答案是數學課唯一目標，造成數學課只是重複的計算，甚至是背誦答案。這種只著重在規則和解題技巧的數學課，對學生來說這是無

意義的機械式學習，並未真正的理解概念。因此，數學變成枯燥乏味的代名詞，許多學習的樂趣因而喪失了。其實，讓學生真正參與學習，是提昇兒童對數學學習興趣的重要關鍵，而進行數學討論活動是促使學生能真正參與學習的有效方式。

從數學教育的內容和目標來看，教室裡的討論活動更是現代數學教育重要的一環。美國教師協會(National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM)在 2000 年發表的學校數學原則與標準中，將「溝通」視為數學教育課程的五大數學化過程之一，「溝通」所強調的即是透過教室中的溝通討論，讓兒童能自然的運用數學語言和符號，並瞭解數學討論是學習數學的重要部份 (NCTM, 1989; 2000)，Andrews(1997)更強調，要讓學生能夠享受做數學樂趣的最好途徑，便是在教室中鼓勵真誠純正的溝通討論。

隨著哲學思維的轉變，現今的數學教育希望能培養學生解決問題的能力及講道理的精神，透過質疑、辯證、歸納的方式獲得概念的真正理解。在教學上更是強調群體解題文化的培養，亦即教學活動需包含群體的討論活動 (甯自強，民 82)。而另外依據認知心理學及符號互動論的觀點，透過溝通討論可讓兒童與他人相互辯證，促成自我反省和調整，有助於概念的澄清和擴展。由此可知，數學討論活動不僅是數學課程中重要的一環，更是促進學習內蘊化達成學習目標的重要途徑。儘管討論活動對數學學習如此重要，很多老師也肯定其功用，但一般老師卻很少採用分組討論的方式進行數學教學，到底教師的困難是什麼？需要何種協助？

本研究的目的，即在於希望透過與實際情境結合的合作行動研究，深入一個五年級的數學教室進行一學期之長期觀察及訪談，分析兒童及師生討論歷程，探討教師進行數學討論的困難之處以及教師所需的協助，進而尋出解決數學討論教學困難之方案。

貳、文獻探討

在近年來的新的學習風潮中，師生及同儕間的討論活動已成為數學教

學中不可或缺的重要部分(劉錫麒, 民 82), 尤其 NCTM(1989), (1991)將數學溝通列入 K 到 12 年級的評鑑與教學的標準之一, 更喚起數學教育者對討論辯證的重視。反觀國內近年來所提倡的建構式數學學習, 亦把教室中的師生及同儕間的討論視為教學過程的主要部分(劉錫麒, 民 82; 曾志華, 民 86), 可見討論活動對於現今數學學習的重要程度。至於討論活動對於數學學習究竟有何影響, 其理論基礎為何? 以下分別從 Piaget 的知識發生論、Vygotsky 的社會互動論以及討論在數學學習上的價值等三方面來闡述。

一、Piaget 的知識發生論(gentic epistemology)

Piaget 一生之中, 最感興趣的問題就是: 了解個體如何認識周遭的世界。他認為個體是主動去認識外在的世界, 而不是被動的吸收知識(陳淑敏, 民 85; 張春興, 民 83)。從 Piaget 的觀點而言, 知識的成長也就是認知的發展, 在知識的形成過程中, 他強調個體與外界「互動」的重要性, 個體雖有某種認知結構存在, 但並非天生固定的結構, 此認知結構在個體與外界的互動中不斷的改變與成長, 此即是認知的發展(陳淑敏, 民 85)。

而影響認知發展的因素有成熟、經驗、社會互動與傳遞、平衡作用等四個, 其中最重要的是平衡作用(Piaget & Inhelder, 1969)。前三個因素最後都需透過個體的同化與調適的心理作用(平衡)才能達成認知發展的功能, 而同化與調適的心理需求, 則是起源於個體與外界互動過程中所產生的知識衝突, 亦即是新、舊知識衝突造成的不平衡狀態, 這也是 Piaget 理論的重心。他並不否認社會互動對認知發展的影響, Piaget(1962)主張社會性知識(socialarbitrary knowledge)—語言、價值、規則、道德及符號系統, 只有在與他人互動中方可學得(周立勳, 民 83)。甚而在邏輯數學的思考上, 促使兒童自我中心概念失衡及提供兒童有效的邏輯觀念之回饋, 同儕互動亦十分的重要。Piaget 相信若同伴間擁有共同智能價值(intellectual values)的用語, 且能保留彼此的命題(propositions)進行交互的處理, 則藉由同伴的思考互動便能相互刺激出認知上的衝突, 增進彼此的認知成長(Tudge & Rogoff,

1989)。

從 Piaget 的理論中，可知運思與互動是同時出現的，個體內的運思活動與外在的互動是一體兩面。故在認知過程中，鼓勵思考與討論有助於發展較高層次的認知（劉錫麒，民 82）。據此，在數學教學上教師應安排讓學生能夠進行思考與相互討論的學習情境，提供學生某種困難問題，讓學生產生認知失調，以激發學生的思考活動，並引導學生進行討論互動，尋求認知的平衡，促進認知的發展。

二、Vygotsky 的社會互動論

Piaget 從知識發生的角度，探究兒童的思考發展；而 Vygotsky 則是從社會歷史的觀點，探究兒童心理的發展，強調社會文化環境對個體心理發展的重要性，其關心的焦點在於「兒童如何透過與他人的互動歷程獲得知識」。

Vygotsky 認為智慧及智能運作是蘊藏在社會文化之中的(Tudge & Rogoff,1989)，他所謂的「社會」包含個人與他人意念的「關連」(relations)，易言之，即是個體與他人達成意念的溝通。個人藉著與他人意念之溝通歷程，他的心智功能才得以開啓並發展（游麗卿，民 85），可見「與他人溝通」是兒童認知成長的媒介。而與他人溝通的心理工具或符號中，Vygotsky 特別強調「語言」在思考發展上所扮演的角色，他相信當個體利用語言符號與他人溝通時，由於有觀點上的互動辯證，這些觀點進而深化為個人內在思想體系的一部分，這就是語言的思考（陳淑敏，民 85）。換言之，人們的思考活動來自於與他人的語言辯證，個體在與他人進行討論過程中，藉由「語言的思考」將新的概念逐漸內化成新的心智架構。

而與他人的語言辯證所以能內化為個體的思考活動，形成更高層次的認知發展，Vygotsky(1978)以「近側發展區」(zone of proximate Revelopment)的概念為說明。他相信在成人或更有能力同伴的協助下，兒童能完成比自己一個人可以完成的較多的工作或學到比一個人獨自能學到的更深入的知識(Gallssman, 1994)。依其所見，兒童之間的討論互動所以能促進認知的

成長，是因為年紀相當的兒童，較可能於彼此的「近側發展區」內運思，在合作互動行為中的示範較兒童個人所能表現的更深入（周立勳，民 83）。基於此觀點，在數學教學中欲讓兒童進行思考，學得新概念和知識，則需讓兒童有針對新概念進行語言辯證、互相討論的機會，若在教學中兒童沒有進行溝通討論，那麼兒童便無法進入深層的思考，更別談要獲得新知識了。

另外，從認知精緻化的觀點而言，其不同於認知發展的觀點主要是在於對學習者資訊的處理影響認知的精熟度之假設（周立勳，民 83），許久以來認知心理學的研究，已指出若要將習得的資料保留於記憶中並與記憶中的舊資料產生關連，學習者必須以某種方式對學習材料進行「認知重構」（cognitive restructuring）或精緻處理，其中最有效的方法即是向人解說學習內容。此一觀點早已獲得許多研究所證實（如 Web,1982a,1982b,1984a,1984b），並且實際的應用於合作學習的教學情境中（如 Dansereau,1988; O'Donnell et al.,1986; O'Donnell & Dansereau, 1993，引自周立勳，民 83）。

綜觀 Piaget 和 Vygotsky 兩人對於認知發展的論點，可發現他們立論雖然不同，但可由互補的角度分析兩者的理論（Ayman-Nolley,1988; Brown,1988; Gaskins & Goncu,1988; Lucy,1988）。不論不同或互補，不可否認的是兩人都注重互動中與他人思考分享的歷程（Tudge & Rogoff,1989），都強調透過討論分享可以促進認知的成長（柯華蕨、幸曼玲，民 85）。

三、討論在數學學習上的價值

自從在英國數學教育界深具影響力的 Cockcroft Report(1982)，提出教室中師生及同儕間的討論，是任何年級數學課程的根本重點後，為數學課程帶來很大的轉變（Brissenden, 1988）。陸續有多位學者分別從不同的面向去探討數學教室中的討論活動，對於討論在數學學習上的價值也獲得了實徵證明（如：Mercer,1985; Phillips,1985; Vetter,1994; Nodding,1991; Lo,Wheatley & Smith,1994; Andrew,1997）。

Mercer(1985)將研究重心放在教室中的討論對兒童運用舊經驗及形成

意義方式的影響，結果發現兒童能夠記憶和理解的重要原因，和教室中師生溝通的動機、能否分享彼此的理解內容有密切關係，因此，在數學學習歷程中多進行數學討論分享師生及同儕間的了解內容，將能夠幫助兒童數學概念的理解。

另外，Vetter(1994)也強調兒童同儕小組間的討論有助於學生建立數學學習的連結脈絡，讓兒童能更有效能的理解數學。而 Nodding(1981,1982)的研究結果也指出，透過小組運作對於提高學生的解題能力有驚人的效果，但 Nodding 在 1991 年進行整班討論教學與小組運作教學，兩者對兒童解題能力成效之研究所得的結論是整班討論學習比分組教學效果好，這似乎意味著經過深思討論的整班教學，也能夠產生像小組教學一樣甚至更好的效果。因此，我們可以說小組運作的教學方法能夠幫助兒童解題，討論、辯證和反省是其主要的关键，若全班教學亦能帶起討論、深思、辯證的風氣，則全班教學的效果也能和小組教學一樣好。換言之，要促進兒童解題的能力，重要的不是在於分不分組，而是在於有沒有進行讓兒童能夠彼此質疑、挑戰、辯護的討論活動。

此外，討論活動更可提供學生擴展數學概念的機遇，促進數學概念的發 展 (Cockcroft Report, 1982; Vetter,1994; Lo,Wheatley & Smith,1994; Andrews,1997)。兒童在與他人的討論辯證過程中慢慢相信別人的方法是對的，開始懷疑自己的答案，同時在這討論的過程中，可以經由其他同學的質疑，激盪出更多的解題策略，延伸他們的解題活動，更在此分享思考的過程中，無形中增加兒童許多擴展數學概念的學習機會，進而調整謬誤的概念。這是在傳統教學中很少發生的(Clement & Battista,1990)。綜上所言，可知當進行數學討論，在學生提出自己想法的說明、解釋，並接受同儕質疑、挑戰時，一方面學習將別人的意見意義化，以重新修正原來的想法，使自己的考量更周密，另一方面可以相互激盪誘引出各種不同的解題途徑，延伸他們的解題活動，讓兒童增加許多的學習機會，進而修正錯誤的概念，幫助認知的成長，這是直接由教師講述的教學中，難以獲得的珍貴歷程。

參、研究方法

一、合作行動研究法

長久以來「教育理論」與「教學實際」間存有一段差距（饒見維，民 80），面對如此「理論」與「實踐」脫離的問題，人文研究派典(human inquiry paradigm)及批判理論皆主張，把建構知識的工作交給研究者和研究對象共同參與，讓研究者與教師共同合作研究，擔任理論與實際間辯證的催化者（饒見維，民 80；陳伯璋，民 79）。據此可知，欲改進教育理論與教學實際相互辯證的關係，即應進入實際的教學情境中，結合教師與研究者的力量，才能真正改善教學狀況。本研究最主要的目的在於解決來自實際情境中的問題—為什麼教師肯定數學討論的好處，卻不使用它？因此，使用結合研究者與教師力量的合作行動研究，深入一個五年級的數學課，進行一學期（87 年 10 月~88 年 1 月）的長期觀察，期間運用參與觀察與深入訪談，收集現場教學的資料進行分析，再針對教師的困難問題，研究者與教師合作共同不斷的探討理論、省思、辯證、修正，以尋出解決方案。此過程是一個不斷循環的研究歷程，針對教師的困難提出行動方案後，依據方案實施時小組討論、全班討論進形的情形進行評估，然後再擬定下一個新的行動方案，直到問題解決。

此循環式的研究過程，以每一個教學單元為一個行動循環的單位，亦即是一個方案的實施過程，共進行十二週五個教學單元。在每個教學單元結束後，研究者與合作教師依據該單元（約四節課）的上課觀察記錄及錄音、錄影資料，進行省思及辯證，反省小組及全班討論中需改進之處，共同協商出新的解決方案，然後再進行下一個循環（此循環過程因限於篇幅，另說明於「國小班級數學討論活動可行方案之探討」一文中）。

本研究採取參與觀察、非正式訪談、深度訪談、文件分析及研究者回顧等策略來收集資料，資料的內容包括每節的觀察記錄、上課錄音、錄影等轉譯資料，每節課後研究者與教師針對上課需澄清之處進一步討論的訪

談資料，教師的省思札記及兒童解題記錄、作業簿、研究者隨時的省思札記等。本研究之資料分析經過編碼、形成主題、暫時性假設、分類、歸類等階段，並運用三角校正法（吳芝儀、李奉儒譯，民84）及持續比較法來考驗假設。除使用多種方式（觀察、訪談、文件）收集資料外，更尋求其他人員如：王老師（合作教師）、劉老師（數學教育師資培育者）等人的看法感想，以克服研究者一人之主觀。例如：對「原案一」（P9）資料的解讀，一開始研究者將之假定為「教師總結不夠清楚，不能將說明與長方形公式明確連結」，當此資料經由劉老師檢閱原案與現場錄影資料後又提出「教師原型概念不足」的不同看法，再經由研究者與王老師的討論，王老師亦認為「我的確並沒有想到應該把它的面積（長三十公分、寬二十五公分的長方形）看成是三十平方公分乘以二十五排，所以我直覺的就想長乘以寬就是面積了---」（871120訪），於是便將這段原案意義歸類為「教師原型概念不足」。其他資料亦經由此方式步驟逐一校正，以尋求客觀並最貼近真實情境的意義詮釋。

二、參與人員

參與此研究的人員共有三位，包括研究者、實際教學的王老師及一位數學教育師資培育者，分別介紹如下：

（一）研究者

自師範學院畢業後在國小已有十五年的教學經驗，大部份擔任低年級的級任教師，目前正在師範學院國民教育研究所就讀。討論教學在研究者未進入研究所前即曾應用於教學中，而進入研究所接觸建構主義的理論後，更啟發了研究者相信數學知識獲得應不是單純的傳遞，而是由學習者基於原有的經驗，透過與他人溝通、討論、辯證、思考主動建構而來的。

在此研究中，研究者擔任參與觀察者的角色，負責收集資料的各項工作並與王老師共同討論改進方案，有時藉由提問促使王老師省思自己的教學過程，有時亦提供王老師疑惑時的參考文獻資料。

(二)王老師

是實際擔任五年級班級的教學者，原就讀於某學院國貿系，畢業後曾擔任英文秘書的工作三年，後來嚮往國小教師的工作，再到花蓮師範學院教育學分班初教系進修，在進修期間曾在台北市擔任兩年的代課老師，八十六年從花蓮師範學院畢業後成為正式國小教師，在嘉義縣任教一年，研究期間是她擔任正式教師的第二年。這前後四年的教學都是擔任高年級的級任教師，她對於最近數學新課程的精神與特色相當注意，也很認同應多給學生機會發表想法、讓學生能主動去學習（871020 訪）。但她之前從未運用小組討論方式教學，不只數學其他科目也沒有。並非她不認同數學討論的功用而是她一直對自己的提問能力沒信心「---要讓學生討論，老師問問題的能力很重要呢！我覺得自己的能力不夠---」（871022 訪）另外，她亦擔心事前準備工作會比較多，恐怕時間不夠、討論起來會花很多時間進度會落後，以及學生能講嗎？會不會上課就停住推不動了？

而王老師願意進行研究，即是希望能藉由理論的支持與協助克服這些困難，讓自己的能力成長，也讓小朋友能真正的討論數學，在數學課中獲得更多知識（871022 訪）。

(一)劉老師

在大學擔任數學教育師資的培育工作，長年從事於國小數學教育的研究，也是本文的第二作者。在此研究中劉老師除到現場觀察王老師教學外，並不定期的與研究者及王老師討論教學的實際問題，對於研究方向提出建議。同時亦擔任理論的諮詢者協助王老師解決課程內容的問題，並在資料分析時檢驗原案分析的適當性，進行三角校正以期使資料的詮釋更加客觀正確。

肆、討論與結論

一、教師未進行討論前的擔心及克服之道

經由訪談得知令王老師不敢嘗試採用數學討論教學的原因包括進度問題、秩序問題及學生能力問題等(871020 訪)，這些問題大多是王老師想像可能會產生的，或是由別的老師口中轉述的，亦即並非全是他自己實施後的經驗，而在此次研究中也發現這些問題其實是可以克服的，分別敘述如下。

(一)時間不夠，進度恐怕會落後

王老師覺得數學課使用討論的方式會很花時間，數學共有十三單元，平均一周要上完一個單元，包括課本及習作若要將課本每一頁每一例題都提出來討論，的確時間上會有困難，王老師也一再的提到這個問題「如果進度趕不上，怎麼辦？」(871029 訪)經共同商討的結果，我們決定只抽出單元中的主要概念，設計可以引導出重要概念的問題，並在問題的討論中去澄清混淆的概念。

(二)學生的能力不足，恐怕會討論不出結果

在剛開始的觀察教學階段王老師一直擔心著學生的能力能否順利進行討論，然而他也省思到可能是自己引導上的問題。「.....對我本身來說，就是我引導上，我覺得我的方法還沒有很確切的引導出他們的思路出來，所以他們常常一個問題，我們就杵在那裡很久那樣。」(871022 訪)

於是在進行教學時，便著重在教師的引導上，而根據觀察結果也說明了經由練習及教師適當的引導學生的潛力不容忽視，常出乎教師的意料之外，例如：在上三角形面積單元時，王老師先由正方形面積引入，提出「三角形面積和平行四邊形的面積有什麼關係？」當元真上台：「形狀、大小、邊長、面積相等的兩個全等三角形能互相重疊，可以組成一個平行四邊形」宜玲進一步補充：「全等三角形他們的底和高也是一樣」，王老師特別在黑板強調「底和高都一樣」盼能激起學生將其與平行四邊形面積產生連結，果然孟翰發現：「那兩個全等三角形所排成的平行四邊形面積，是那兩個三角形的兩倍。」

於是王老師根據孟翰的想法進一步引導：「就是說兩個全等三角形

會變成一個平行四邊形，那反過來呢？一個三角形呢？」結果引發文哲更深一層的思考，發現三角形面積公式的原理，他說：「一個三角形就等於半個平行四邊形，也就是 2 分之 1，那為什麼三角形的面積是底乘以高除以二，是因為底乘以高是指一個平行四邊形的面積，而三角形是它的一半所以要除以二」（871201 觀）以上所呈現的例子是發生在實施第二個行動方案時，當時是進行討論活動的第八堂課，學生在前七堂課中的練習應也是不容忽視的重要條件，而王老師在關鍵地方適切的引導提問，更是發揮了重要的影響力。

學生能否討論出重要概念，固然和其本身的數學能力有關，但若教師能給予具挑戰性的問題，加上練習以及教師適當的引導，學生依然能有質疑辯證的討論品質。

(一)學生會嬉鬧，秩序恐怕會很亂

一談起討論，一般教師的直覺就是「那一定會很吵、很亂，剛好給不專心的人摸魚的機會」「可能嬉鬧的時間，會佔去大半」，王老師也不例外。的確，在剛開始前兩週（觀察教學階段）只要一進行小組討論，各組的音量便大了起來，可是針對數學內容的對話寥寥可數（871022 觀、871029 觀），但隨著方案的進行發現並非每一堂課都是如此，學生甚至愈來愈能很快的進入狀況，歸納其克服之道共可分為以下幾方面。

1.提出具認知衝突性的問題，吸引其注意力

學生會吵鬧通常是因為題目太簡單了，根本不需要討論，所以他們便把時間花在嬉戲，據研究期間的觀察比較，當王老師所佈的問題是直接可看出答案或課本上就有答案的，學生真正討論的對話便會較少，較常會發生嬉鬧的情形，尤其是在進行小組討論時此情形更加明顯，例如：「長寬都是一公分的正方形，切一半面積是多少？」蔡逸立即說：「2 分之 1 啊！」榮宇也說：「對啊！也就是 0.5 啊！要討論什麼？」然後，整組只有孟翰在寫白板，其他人開始聊天，蔡逸還跑到第二組去看別人寫，引起一陣小小的騷動（871109 觀）。

這樣的問題也影響接下來的全班討論秩序，當第二組代表在台上說明時，台下同學根本不聽，自己做自己的事，這情形和所提出的問題不具挑戰性應有極大的關係。這種不能挑戰學生原來認知的問題，不能緊緊抓住兒童的注意力，自然的無法將兒童的心留在數學對話上。

2.運用適當的策略，集中討論的焦點

這些策略是在進行數學討論期間，不斷修正評估而來的，首先要給予適當的任務分配，在小組討論之前應讓每個小朋友都知道自己的任務為何，例如有一位要寫出解題過程，兩位要代表上台報告，全組六個人都要提出自己的看法等。

另外可以運用小白板或投影片讓兒童集中討論的焦點，「六組小朋友不約而同的圍著拿白板的人，形成六個小圈圈，專注的討論起來。小白板彷彿是一塊強力磁鐵將全組的焦點凝聚，使組員共同投進數學活動中，透過小白板上答案的修改更正，兒童同儕的討論更熱烈了」(871103 札)。

此外，亦可運用獎勵的方式來激起同學專心聆聽台上同學的說明，每當王老師說：「只要你能向台上同學提出一個疑問，或不相同的看法，那一組就能得到一個蘋果（黑板上的圖片）」總能有效的喚起學生專注的聽講（871215 觀）。雖然，他們已是五年級的孩子，對於獎勵依然非常渴望，有時王老師也用口頭讚美的方式，鼓勵肯定認真討論的小組，也能激起其他組的仿效。

二、教師進行數學討論時的困難之處

(一)選擇適當的問題---佈題的能力

這裡所談的佈題，是指針對單元內容選擇適當的題目，能夠讓兒童進行小組討論的問題，類似於 Wheatley(1991,1993)所提出的「問題為中心學習」的三要素問題(tasks)、合作的小組和分享中的第一項。在本研究中發現教師要統整教科書的內容，抽離出各單元的主要概

念，然後針對各主要概念設計適當的問題，以引起兒童的認知衝突是一件不容易的任務。王老師在第一個方案實施時即開始嘗試去自己佈題，但他對於找出單元中的主要概念常覺得困難。

教師也常會以教科書上的例題為題材讓學生進行小組討論，由於這些例題課本上已有答案較不具挑戰性，影響學生在小組討論時的熱度和品質。這結果和 Atkins (1999) 的研究結果類似，Atkins 亦認為要佈一個題目，能讓學生察覺到自己想法中的瑕疵，實在是一件充滿挑戰且困難的事。常常教師所佈的題目無法引發學生的認知衝突，或不具挑戰性便引不起學生討論的動機。

一直到 87 年 11 月 26 日 王老師提出一個非課本的題目，但卻對兒童概念釐清非常重要的問題「平行四邊形把它『推』成長方形後，面積會不會改變？」結果引發學生間很寶貴的對話 (871126 觀)，這一堂課不論是小組討論或全班討論學生們都興致高昂，因為他們也都很想知道真相，最後家宏獨排其他五組的答案，認為「平行四邊形用推的和用切的兩個變成的長方形面積是不相同的，因為平行四邊形推過過去以後，『高』就長高了！」並且成功的說服了台下同學，這堂課精彩熱烈的情形讓王老師相當震驚 (陳淑娟，民 88)。

「----我本來還在想要怎麼講呢！連文哲都弄錯了！沒想到家宏用原子筆一比（高）說『高』長高了所以面積會變大，同學就比較相信了！」(871126 訪)

這堂課帶給王老師很大的信心，他開始願意嘗試非課本的例題，這期間我們也將理論探討重點放在各單元教材的學科知識，加上下課後的訪談和省思與研究小組共同討論，漸漸的出現像：「三角形的面積和平行四邊形面積有什麼關係？」平行四邊形的底和三角形的底有什麼關係？」(871201 觀) 可以引導兒童發現三角形面積公式由來的好問題。

可見，多充實單元教材的知識、課後省思、持續練習再加上來自同儕的鼓勵與切磋，可以讓教師較能掌握單元的概念，佈一個能引發

兒童深度討論的好問題。

(二)數學的原型概念知識

教師對於單元教材中的原型概念，深深影響著整個引導過程以及討論的方向，若教師本身的概念不清楚，非但不能針對學生的困惑適時予以引導，更有可能造成錯誤的觀念。對於數學原型概念知識的欠缺，是王老師在引導討論時的另一個待解決的困難。如在平行四邊形面積的單元中，王老師欲引導出長方形面積的原理：

『原案一』

王老師提出長 6 公分，寬分別為 1 公分、2 公分、3 公分的三個長方形，讓各小組討論其面積。

文哲：要算長方形的面積就是長乘以寬，每個格子都是 1 平方公分，因為邊長的格子都是一公分。

師：好，我們針對第六組的問題討論一下，第六組小朋友的討論結果，長方形的面積它就是長乘以寬，每一個格子都是 1 平方公分的正方形，因為邊長的格子都是 1 公分，這樣有沒有問題？

了凡：一定嗎？（每個格子都一定是 1 平方公分嗎？）如果是 3 平方公分呢？

師：對嘛！一定嗎？

文哲：你指的是整個長方形面積 3 平方公分？還是 1 小格的面積？

了凡：如果是第三題的話（長 6 公分寬 3 公分的長方形面積），就不一定全部是 1 公分啦！對不對？

文哲：你是說整個長方形的面積？

了凡：不是，如果它一格是 3 平方公分。

文哲：不會吧！

了凡：為什麼不行？

文哲：那應該是……還可以分解啊！

文哲：那就分成 3 個 1 平方公分就好了！就是 1 平方公分、1 平方公分、1 平方公分！

師：_____老師做一個總結，也就是第六組所說的，任何一個長方形你可以把它分割成很多小塊的最基本的那個正方形，也就是邊長 1 公分的正方形，它的面積就是 1 平方公分。假設不是上面這 3 題，換一個長 30 公分寬 25 公分的長方形面積要怎麼算？

學生：30 乘以 25

師：_____除了 30×25 以外，我們還可以用一個方式_____

宜玲：25 乘以 30

師：喔！宜玲說的 25×30 ，也就是說除了長乘以寬之外，你也可以寬乘以長，到目前為止有沒有問題？（871110 觀）

從以上的例子中可看出，雖然王老師花了很多時間去引導出長方形面積是由許多 1 平方公分的正方形所拼湊成的，但他在最重要的地方「為什麼長乘以寬以後就是面積？長乘以寬和 1 平方公分的小格有什麼關係？」卻沒有引導兒童進一步澄清，研究者原以為只是王老師在總結時不夠清楚，在文哲和了凡的對話中單位面積的概念雖已呼之欲出，但王老師在做總結時，只是再套進長乘以寬的公式。劉老師檢閱原案後提出「可能是王老師面積原型概念不足」的看法，所以在學生答出 30×25 時，老師無法再問 30×25 代表什麼？它和 1 平方公分的正方形有何關連？事實上，30 可以看成 30 個 1 平方公分，25 就代表 25 排 30 平方公分，所以 30×25 所蘊含的意義應是 30 平方公分*25 排，若 25×30 則是以 25 平方公分為單位乘以 30 排，也是可以得到相同的答案。然而，王老師沒有如此引導，只是模糊的以長乘以寬總結，應是由於本身的面積原型概念並不清楚。這個觀點亦在課後的訪談中「---當時我的確並沒想到應該把它的面積看成是三十平方公分乘以二十五排，---直覺的就想長乘以寬就是面積---」（871120 訪）獲得證實。

若教師對於學科內容並不十分清楚，則無法在傾聽兒童說明時，察覺出其概念的迷失之處，更無法針對需釐清的概念，提出好的問題來引發學生的思考。數學原型概念知識的不足，是在研究期間才發現教師亟需協助的的困難，

經由幾次的課後省思與訪談，增進了王老師對學科內容知識的探索意

願，接下來我們也將理論探討重點放在單元教材「面積」的部份，由研究者收集相關資料包括八十四、八十六學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編（嘉義師院出版）及國民小學數學科新課程概說，讓王老師閱讀並與研究小組討論，由於王老師開始對自己教學內容時時回顧省思，漸漸的也主動的發現疑惑，例如「長方形的長和寬到底是怎樣界定的？」（871215師訪）就因擁有一顆主動思考的心，讓王老師在求知的驅力下，逐漸累積更多的學科知識，也對他後來的討論引導產生幫助。

(三)沿著概念主軸層層追問的能力

這裡所指的追問能力是指在全班討論時，教師根據學生說明的內容，需要澄清、擴展、深入的部分，進一步再提出問題挑戰學生概念的能力，在本研究中發現，層層追問必須是沿著單元的概念主軸逐層抽絲剝繭，才不至於迷亂方向，將學生帶進五里霧中，越討論越模糊。如：在四邊形的單元中

『原案二』

師：正方形是菱形嗎？為什麼？把它寫在小白板上。

【學生們立刻很興奮的討論著。】

-----四分鐘後。

師：請第二組上台。

佩璇：正方形是菱形的一種，因為形成正方形的條件和菱形一樣。

師：那你可不可以把那個條件說一下？

佩璇：四個邊一樣長。

師：好！四個邊一樣長，有沒有同學要補充的？好，文哲。

文哲：2雙對邊平行。

師：2雙對邊平行，好。現在請第二組入列，有沒有同學要補充的？好，佩璇！

佩璇：正方形四個角都是直角，而四個邊都等長。

師：現在老師的題目是「正方形是菱形嗎？」但是，菱形沒有牽涉到直角，好，再來！

【學生有些猶豫不知道要接什麼，停頓約五秒鐘。】

(871105 觀)

在上面這段對話中，可以看到教師原來是要讓學生理解正方形也是菱形的一種，但是當佩璇回答「形成正方形的條件和菱形一樣」時，教師未能及時的察覺出佩璇的回答尚未完全釐清概念，並未再針對兩者間的條件包含關係進一步追問下去。後來佩璇兩度的說明「四個邊一樣長」、「正方形四個角都是直角」事實上都只是形成菱形和正方形的條件敘述，並沒有說出菱形和正方形之間的包含關係，教師應抓住時機繼續追問兩者間的關係，以釐清概念，但教師卻岔開由文哲回答或只以「菱形沒有牽涉直角」來說明，錯失建立正確概念的好時機。

在這堂課接下來的對話中，依然出現這種情形：

【了凡拿他們寫在白板的的答案給老師看。】

師：現在第二組又補充一點，「對角線交叉可以形成一個直角，（第二組小聲的說四個）好，四個直角，我們畫圖看看，不錯喔！了凡提的這一點課本上沒有喔！了凡提的菱形的對角線交叉可以形成四個直角，這樣子有沒有問題？

學生：沒有。

師：所以，老師再問一次，正方形是菱形嗎？

【學生猶豫，零零落落說：是】

師（不滿意）：正方形是不是菱形？

學生大聲：是。

師：為什麼？

學生：因為它四個邊都等長，兩雙對邊平行。

師：好，另外還有了凡提的這一點，對角線交叉後形成四個直角。

(871105 觀)

由於教師未能扣住概念的主軸層層追問，雖然了凡說出課本上所沒有的條件「菱形的對角線交叉可以形成四個直角」，依然不是「正方形是菱形」的真正原因，只是讓學生兜著外圍繞，並沒有幫助兒童釐清兩者的互屬關

係，從最後學生猶豫的情況來看，這一次的引導由於脫離了概念的主軸，反而讓兒童更模糊了。

全班討論時教師要常常清楚所佈的問題的主要概念是什麼，並傾聽學生的說明及時給予適當的問題(task)，挑戰學生的原有認知基模，促發學生進一步去思考，這對王老師來說並非易事，在 Atkins(1999)所做的研究也有類似的結果，Atkins(1999)發現教師在傾聽學生的對話時，通常很難瞭解其想法與需建立的概念到底有何連結，教師常只是瞭解學生說話的表面意思，未能深入。這樣的困難，在剛開始時常常出現(871103 觀、871105 觀、871110 觀、871117 觀)，但到學期末有越來越少的傾向，王老師漸漸較能掌握學生困難所在，藉由提問來引導兒童釐清困難癥結，主動建構正確的概念。例如：在進行「多邊形」的單元時：

『原案三』

師：什麼是多邊形？

家宏：三個邊以上的形狀叫多邊形。

師：好，老師重複一次喔！看看誰會提出問題？三個邊以上的形狀叫多邊形，有疑問嗎？清楚嗎？三個邊以上的叫多邊形。

『畢荃舉起手』

師：好，來，畢荃有問題請說。

畢荃：不一定呀！『學生發出：啊？』

師：不一定！？好，來說給我們聽聽看。

畢荃：有可能是一邊形。

學生：啊！（大聲）不可能一邊形哪！

師：讓畢荃自己來想想看。畢荃，你要不要說明一下？

畢荃：有可能是一個邊以上的。

學生：不可能哪！

師：畢荃認為是一個邊以上的，不是家宏的三個邊以上，到底誰對呢？

如果你們認為畢荃說的不可能，那麼誰可以起來說服畢荃呢？

孟翰：老師，可是一個邊和兩個邊不可能組成一個形狀啊！

同學附和：對嘛！

師：來，那我們請畢荃來回答他的問題，(走向畢荃)來，孟翰他提出一個問題耶！一個邊跟兩個邊不可能組成一個形狀，你認為呢？

畢荃：那我可以畫畫看。

『畢荃上台去試著要畫出一邊形和兩邊形，結果失敗，站在台上靦腆的笑著』

師：你贊成孟翰的看法嗎？『畢荃點點頭』好，他贊成。好，謝謝畢荃，他很有風度喔！（880107觀）

在這段上課引導中，王老師瞭解畢荃不理解組成形狀的必要條件，但並不直接告訴他定義，而是藉由提問的方式讓畢荃自己思考問題的癥結，再引出同儕的質疑及說明讓畢荃真正釐清多邊形的定義，如此的引導方式在學期末時較常出現於王老師的數學教學中。

伍、結語

回顧整個方案的發展過程，剛開始第一個及第二個方案出現的問題較傾向外在因素，多能以策略克服。例如：進度落後問題可以抽出單元主概念去設計佈題，在全班討論時先挑一組發表再尋求補充去克服。若學生態度消極不投入教師可事先指定小組代表發言者，使發言機會平均。以發給小白板或投影片讓學生凝聚討論焦點，並增加佈題的挑戰性來克服秩序問題。在小組引導時間不足方面，教師可先引導三組，第二題再引導另外三組，依序循環來加以解決。至於學生不發問的困境，則可採用獎勵制度、教師先不提問、讓發表能力較佳者先發表等策略來克服。

而有關於討論實質內容者，如：同儕質疑辯證不足、討論時離題無法建構概念，涉及教師本身之「佈題能力」「引導能力」，到了第三、四個方案階段，解決的重點幾乎集中於教師本身的佈題能力及引導能力等方面。在增進教師引導能力方面有四個策略：多充實概念理論、常問「為什麼」、

運用複述、回應、提問、解說、挑戰的技巧 (Resnick, 1995)、協助學生對焦、運用淡化和強化的策略等。另外在教師佈題能力方面可行的策略有：鼓勵教師多省思，釐清佈題概念主軸，跳脫課本例題的框架多變化，並依據學生的反應進一步佈題，直到釐清學生的概念為止。雖然，直到研究期間結束，有些能力王老師仍然未臻理想，仍會在該挑戰、追問的時候落失良機，但是，整體而言王老師的教學型態已和觀察教學階段大不相同，當教師本身在這些方面有所進步學生的討論品質也跟著進入佳境，從學生大多能上台說出自己的想法、對別人的解說提出質疑的討論情形來看，王老師引導的方式已漸走出原來一問一答完全主導的模式。

對於一位才教書三年，從來沒有使用過數學討論教學的教師而言，這四個月的最大成長除了「我覺得在這四個方案進行的過程中，已讓我知道數學討論進行的方式，也知道遇到一些狀況時該如何處理，有信心去做了(880119 訪)」以外，重要的是她睜開另一雙看待學生的眼睛，相信學生的能力「幾次的討論課程後，發現有些孩子的潛能被激發出來了，思考邏輯常超乎老師的想像(871121 省)孩子在討論中透過自我思考所形成的數學概念往往是牢不可破的...(871124 省)」因而她更願意傾聽，將學習的舞臺還給學生，讓學生成爲自己學習的主人。

另外，更珍貴的是她已擁有一顆願意時時省思的心，「那些學科概念知識，釐清我許多觀念，若繼續實施下去，我的佈題應該還可以更好(880111 省).....我在下學期還是用這種方式上課，小朋友已經習慣，而且很喜歡...我想讓小朋友先預習，然後讓他們自己提出問題來討論試試看.....(880120 訪)由此可見數學討論活動已在這個班級師生心中種下成長的根苗，行動研究最可貴的便是不斷的循環再成長，是一個持續的歷程，相信它已在這個班級中實現了。

參考書目

詹志禹 (民 86)。全方位對話。教育研究雙月刊，17，6-7。

- 鍾思嘉、林青青、蔣治邦(民80)。國小學童數學焦慮之形成與原因。**教育與心理研究**，14，99-140。
- 甯自強(民82)。國小數學科新課程的精神及改革動向-由建構主義的觀點來看-。**科學教育學刊**，1(1)，101-108。
- 張春興(民83)。**教育心裡學-三化取向的理論與實踐**。台北：東華。
- 劉錫麒(民82)。**數學思考教學研究**。台北：師大書苑。
- 邱兆偉(民84)。「質的教育研究」的訴求與設計。**教育研究**，4，1-33。
- 吳芝儀、李奉儒譯(民84)。**質的評鑑與研究**(Patton,1990;Qualitative evaluation and research methods)。台北：桂冠。
- 周立動(民83)。**國小班及分組合作學習之研究**。**國立政治大學博士論文**，未出版。
- 柯華崑、幸曼玲(民85)。**討論過程的互動-年齡與推理能力的影響**。**皮亞傑與維高斯基的對話會議手冊**。台北市立師範學院 兒童發展中心。
- 陳淑敏(民85)。**從社會互動看皮亞傑與維高斯基的理論及其對幼教之啓示**。**皮亞傑與維高斯基的對話會議手冊**。台北市立師範學院 兒童發展中心。
- 曾志華(民86)。**社會互動與數學知識之建構：一個國小三年級數學教室之俗民誌研究**。**國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文**，未出版。
- 張俊紳(民85)。**學習小組教學在國小數學科解題計畫訓練之實驗研究**。**台東師院學報**，7，53-88。
- 游麗卿(民85)。**Vygotsky 對研究概念發展的啓示**。**皮亞傑與維高斯基的對話會議手冊**。台北市立師範學院 兒童發展中心。
- 陳淑娟(民88)。**用「推」的和用「切」的面積一樣嗎？一堂有趣的數學討論課**。**科學教育與發展季刊**，14，65-72。
- 陳伯璋(民79)。**教育研究方法的新取向—質的研究方法**。台北：南宏圖書有限公司。
- 饒見維(民80)。**人文研究派典在教育上的應用**。**國立花蓮師範學院初等教育系學報**，1，49-66。
- Ayman-Nolley, Saba. (1988). Piaget and Vygotsky on creativity. **The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition**, October, 10(4). 107-111.
- Andrews, A.G. (1997). Doing what comes Naturally: Talking about Mathematics. **Teaching Children Mathematics**, January, 236-239.
- Brown, T. (1988). Why Vygotsky? The Role of Social Interaction in Construction Knowledge. **the Quarterly Newsletter of Comparative Human Cognition**, October, 10(4), 111-117.
- Brissenden, T. (1988). **Talking about mathematics**. England: Basil Blackwell.
- Clements, H. & Battista, T.M. (1990). Experience, Problem Solving, and Discourse as Central Aspects of Constructivism. **Arithmetic Teacher**, December, 34-35.
- Cockcroft, W.H. et al. (1982). **Mathematics Counts** (The Cockcroft Report) London, Her

Majesty's Stationery Office.

Glassman, M. (1994). All Things Being Equal: The Two Roads of Piaget and Vygotsky. **Developmental Review**, 14(2), 186-214.

Lo, J., Wheatley, G.H. & Smith, A.C. (1994). The participation beliefs, and development of arithmetic meaning of third-grade student in mathematics discussion. **Journal for Research in Mathematics Education**, 25(1), 30-49.

Mercer, N. (1985). Communication in the Classroom. In **Every Child's Language, An In-Service Pack for Primary Teachers, Book I**, Clevedon, Multilingual Matters in association with the Open University.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). **Professional standards for teaching mathematics**. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1969). **The psychology of the child**. London: Routledge & Kegan Paul.

Resnick, B.L. (1995). Inventing Arithmetic: Making Children's Intuition Work in School. In C. A. Nelson (Ed.), **Basic and applied perspectives on learning, cognition, and development** (pp. 75-101). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Tuedge, J., & Rogoff, B. (1989). Peer influence on cognitive development: Piagetian and Vygotsky perspective. In M. H. Bornstein & J.S. Bruner (Eds.), **Interaction in human development** (pp. 17-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Veter, R.K. (1994). The Learning Connection: Talk-throughs. **Arithmetic Teacher**, 168.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society; The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University.

Wheatley, G.H. (1991). Constructivist perspectives on science and mathematics learning. **Science Education**, 75, 9-21.

Wheatley, G.H. (1993). The role of negotiation in mathematics learning. In K. Tobin (Ed.), **The practice of constructivism in science education** (pp. 121-134). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

陳淑娟，現任嘉義縣中埔鄉中正國小教師

劉祥通，現任國立嘉義大學數學教育系系主任