教育研究資訊
2002年8月 10卷4期 頁121-138

從過程-對象對偶體看當前「建構式數學」的爭議

林冠群、葉明達

摘要

如果透過理性地對話和討論，爭議也將會是助益。面對「建構式數學」的爭議，我們可以將它們分爲成效、作法和本質等三類焦點，若要釐清爭議，應把焦點放在有關本質的爭議，而這類爭議可歸結爲「定義式」(defining)和「發展式」(developing)這兩種觀點的相互質疑。不論對數學思考(mathematical thinking)的理解爲何，「定義式」或是「發展式」課程的目的都是要培養出學生的數學思考能力。因此，要釐清爭議，必須回到本質的探討，對數學思考的特性有深入的瞭解。數學概念具有對偶性(dual nature)，Gray和Tall(1994)稱它爲過程-對象對偶體(procept)。筆者從數學思考的這種對偶特性，探討了它與數學學習之間的關係，認爲數學學習的困難在於大多數數學概念會根據問題的情境及學習者對概念的理解起著過程或對象的作用，而過程和對象間的轉化是需要時間和工作記憶空間，以及熟練、正確、穩固的運算基礎。類比於數學概念是過程-對象對偶體的想法，數學課程應該也是一種對偶體才是，筆者稱它爲發展-定義對偶體(devinition)。新課程爲了糾正傳統課程偏向「定義」側面所產生的弊端，在推展的過程中特別強調了「發展」的側面，然而，如果我們一再偏向"發展"的側面，目前的爭議仍會持續。

關鍵詞：建構式數學、過程-對象對偶體、數學思考、學校數學課程

林冠群，輔英科技大學共同科講師、高師大科教所博士候選人
葉明達，高雄市立新莊高中數學教師、高師大科教所博士候選人
收件日期：91年2月5日；接受日期：91年8月20日

Educational Research & Information
Volume 10, Number 4 2002.8

A Discussion about Current Contentions of Constructivistic Mathematical Curriculum from Proceptual View

By
Lin, Guan-Chyun Ye, Ming-Da

Abstract

Any contention will be a great benefit if it is dialogued with and discussed with dissenter rationally. In this study these contentions of "constructivistic mathematical curriculum" in the latest were be divided into three key points: effect, mode, and nature. If we want to clear the contentions, it is necessary to focus on their nature which can be encapsulated to the query between defining view and developing view. The purpose of defining curriculum or developing curriculum is to bring up the mathematical thinking ability of students however what mathematical thinking is comprehended in these two curricula. For this reason, we must understand the nature of mathematical thinking. Gray and Tall (1994) named mathematical concept "procept" according to its dual nature. From this dual nature of mathematical thinking, the difficulties in learning mathematics are to make sense of the relationship between process and concept. Thinking time, working memory, and groundwork for operation are necessary for the students who are transforming between process and concept. The author named mathematical curriculum "devinition" by analogy with "procept". New curriculum has been emphasized on the side of "development" to correct the abuse due to the bias side of "definition" in traditional curriculum. Nevertheless, these contentions of "constructivistic mathematical curriculum" will be sustained if we emphasize on the side of "development" continually.

Key words: Constructivistic Mathematical Curriculum, Mathematical Thinking, Procept, School Mathematical Curriculum

---

Lin, Guan-Chyun, Instructor, Department of General Education, Fooyin University of Technology
Ye, Ming-Da, Math Teacher, Kaohsiung Municipal Hsin Chuang Senior High School

壹、前言

自教育部於民國八十二年九月頒佈國民小學的數學新課程標準，八十五學年度全面施行新課程以來，便不斷地有相反的意見出現。去年初，由於國中小九年一貫課程即將實施，再度引爆論戰，這種爲了除弊所興起的新課程，而今卻又成爲爭議的焦點。

在國內，數學新課程被稱爲「建構式數學」，這是由於它是根據國外建構理論研發而成。雖然新課程標準並未明訂要使用那一種教學法，但通過教育部審定的六個版本(康軒、南一、新學友、牛頓開發、翰林、國立編譯館等)都強調透過與同儕之間的討論與其他互動過程，讓學生建構數學概念，並將建構的過程記錄下來，成爲「格式記錄」(如算式摘要記錄、解題過程記錄、問題記錄、列式活動、逐次減項記錄等等)，以利學生與他人溝通和自我反思。因此，爲了突顯這種針對傳統教育「知識傳承」觀點下講授式教學所造成的弊端所興起的教學方式，一般便把「建構式數學」的稱號等同於新的教學方式。雖然「建構式數學」將學生建構的過程與經驗視爲課程的一部分，又因建構或學習經驗的產生，則是源於學生與周遭人事物的交互作用或互動，故而課程與教學實在糾纏不清，但將「建構式數學」和「建構式教學法」兩個不相同的詞等同與混稱，容易引起誤解。

本文將從數學思考（mathematical thinking）中的過程-對象對偶化（proceptualization）的特性，對當前「建構式數學」的爭議進行討論。首先把當前環繞在「建構式數學」的爭議焦點，分成成效、作法和本質等三類。作者將論證：若要釐清爭議，應把焦點放在有關本質的爭議，而這類爭議可歸結爲「定義式」（defining）和「發展式」（developing）這兩種觀點的相互質疑，並以「發展式數學」來稱呼新課程。其次，將說明爲何將數學概念看成是一種「過程-對象對偶體（procept）」，而數學學習複雜的原因之一是大多數數學概念會根據問題的情境及學習者對概念的理解起著過程（process）或對象（object）的作用，因此應從此對偶關係來檢視數學課程。最後，筆者提出數學課程也是一種對偶體的想法，稱它爲發展-定義對偶體（devinition），並肯定當前爭議的正面功能。

貳、當前「建構式數學」的爭議

除了一些較爲情緒性的批評（如教育部有「綁標」與圖利之嫌等）之外，有關「建構式數學」爭議的焦點，大概放在成效、作法和本質等三類。

一、成效的爭議

國科會國家理論科學中心國外諮詢委員滕楚蓮認爲「過去台灣的數學教育雖然不是完美無缺，但算是成功的。他在國外教了 25 年的數學，一直覺得台灣的學生的平均素質不錯。他批評目前國小學生學了新教材後，感覺變笨了（引自陳香蘭，2001）」。新竹市教育局長蔡式淵表示，「新式建構式數學已實施五年，各種負面效應逐漸浮現，部分學校、家長不斷向該局反映，指很多小學生上了五年級還不熟悉簡單數學四則運算（引自黎慧琳、廖淑惠，2001）」。曾任行政院教育改革審議委員會委員的中央研究院數學研究所研究員李國偉（2001）指出對這一波建構主義下的數學教育改革之不滿意與論戰，在美國同樣也掀起過數學戰爭。他認爲「新教材因爲要以解決問題爲核心，不再按傳統依數學觀念的邏輯順序來教學，而是先鋪陳一個問題的情境，再應解題所需發展出要用的數學。並且很多問題是所謂『開放性』的，不要求有唯一最終的答案，而且要學生寫一大堆描述對問題感覺的文字」。如此可能會「把數學貶低到工具的地位，看不出數學概念彼此之間的關連與完整性，也無法達到傳統數學教育練習思想精準有條理的作用」。「新教材也特別強調小組的學習，教師根據教材把問題交給小組後，只能從旁觀察協助，不能主動告訴學生解決問題的辦法，必須由學生自己討論，嘗試發明出所需的數學觀念或工具，經過團體的努力最後把問題解決掉。這種教學法如果不是小班根本難以進行，並且經過冗長的討論嘗試後，學生的焦點不一定會集中到有意義的數學主題上。因爲學生在數學課上玩得很開心，表面上看來對數學的興趣增高了，但是否就像一九九七年八月二十五日的「時代」雜誌的專門報導：『這算是數學嗎？』所列的副題一樣，『數學突然有趣好玩了，但是孩子眞的學到了東西嗎？』（李國偉，2001）」

然而，新竹國小教務主任陳秋月表示，「建構式數學強調以引導方式帶領學生思考解決問題，比較重視小朋友思考的過程，這幾年看來，她覺得小朋友主動思考解決的能力，比起以往有改善的現象，是可喜的事。她說，雖然，與以前的課程相較，學生在『計算』學習能力上顯得比較慢，但長遠來看，她還是

覺得建構式數學是比較好的方法（引自黎慧琳、廖淑惠，2001）」。台北師範學院數學教育系教授鍾靜從他的研究結果（鍾靜，1993、1994），指出使用「建構式數學」的實驗班和傳統教學的普通班，兩者在數學知識層面的學習效果相近，但在喜歡上課比例等方面實驗班優於普通班（引自陳榮裕，2001）。但批評者可以繼續質疑此類研究的規模與抽樣方式，也可以質疑造成在數學知識層面學習效果相近的原因，可能是其他在研究未控制的因素（如實驗班學生在課後接受了家長或他人以傳統教材或教法的輔導）所造成。事實上 Kilpatrick（1997）在面對反對改革者質疑缺乏大規模研究來支持改革成效時，指出不管研究規模有多大，研究從未能證實教學方式（不論傳統的或其它）可以無差別的使用。不同的老師面對不同的學生教不同的主題，其教學方式總是由教師本身用不同的方式詮釋與使用。況且，對於「孩子眞的學到了東西嗎？」的問題，大家所重視的那個「東西」與如何測量的方式也不盡相同，因此，光靠實徵研究的證據，成效的爭議仍會持續，仍不足以完全釐清爭議。

二、作法的爭議

不論支持或反對者，對成效的爭議總會歸因於作法的問題。例如，台北師範學院初教系教授鍾聖校（1994，1998）以兒童認知能力爲依據，批判「建構式數學」的普遍適用性，倡議解構教學法的霸權法則。台灣師範大學數學系教授陳昭地表示，數學教學絕不可以強迫使用單一教學方法；台灣大學數學系教授史英表示，課程綱要並未強迫所有教學一定要採用「建構式數學」，都是理解錯誤引發的誤會（謝蕙蓮，2001）。美國教育部與國家科學基金會組織了一個「數學學習研究委員會」，於 2001 年元月底發表了一本報告書：「Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics」，認爲有效教學的方法是多元的，不應該只遵循某種特定的途徑（李國偉，2001）。可見反對教學法的霸權已成爲共識。但是，通過教育部審定的六個版本都強調「建構式數學」，老師使用教材，的確會影響教學方法，當然會引發誤會。因此，曾經參與 85 年實施的牛頓版國小數學教科書編輯的史英，強烈主張評審委員只要審查內容有無錯誤、會不會危害學童身心發展，不要拿著雞毛當令箭握有決定教科書內容的生殺大權（謝蕙蓮，2001）。

然而，「建構式數學」的提出是針對舊課程標準之下的傳統式教學法的弊端而來的，雖如黃敏晃所說：「建構式數學並不是一種特定教學法，而是一種理念

和精神……新標準並未規定一定要用建構式教學，只是強調要了解知識建構的歷程」（陳榮裕，2001）。但主張者決不會將它僅限於學習觀。況且「學習觀必定影響教學觀，……主張建構式教學法的人需得進一步的說明他們的教學觀」（甯自強，1993）。所以，光靠教育部行文表明未規定要採用特定的建構教學法，也不能眞的化解爭議。舊課程標準之下的傳統式教學觀和新課程標準之下的建構式教學觀的不同與爭議，將會持續。

全國教師會副理事長廖俊仁表示，「建構式數學本質上並沒有太大的問題，但在推動的方法和手段出了問題，致有些老師還不太習慣這樣的教學法，才會流於『形式』。他強調，以往由中央一條鞭的教學模式，『內化』老師極深。例如，建構式數學強調步驟，因此，老師要求學生得將每個過程都寫下來。這種原意是對的，但太強調就會流於形式；老師的教學方式與心態都要有所修正（引自黎慧琳、廖淑惠，2001）。」黃敏晃也指出，習慣講述式的老師，一開始多會反對建構式教學；有些教師緊守建構教學法，未依實際狀況調整教法，也造成教學效果大打折扣；另一方面，許多家長根據過去經驗無法理解該教學法而反對。黃敏晃和鍾靜都指出，傳統教學法也可讓人學得不錯，問題是程度屬於中後段的學生，在傳統教學法下，低年級仍可應付，到了高年級卻可能變成「陪讀」，未來要落實「建構」理念，最重要工作之一是要加強教師在職進修（引自陳榮裕，2001）。鍾靜和朱建正（1995）的研究指出，教師才是課程改革成功的關鍵人物，他們透過定期舉辦建構導向的教學研討，發現教師面對數學新課程不同的數學觀和教學觀時，因爲教師的願意嘗試和學生課堂上的表現，教師在轉型期的歷程中確有轉變及成長，並改變其數學教學信念。有趣的是，在美國反對 NCTM 課程標準最有力的人士之一，柏克萊加州大學知名的華裔數學教授也是「數學學習研究委員會」成員的伍鴻熙教授，他認爲「改革中相對忽視了教師資格問題。七十和八十年代失去數學課堂功能的主要原因是，對數學的了解不夠，最終導致要求改革的呼聲高漲……NCTM 開始重視課程、教育學和評估法，而對一項數學教師再培訓計劃和加強未來數學教師教育的計劃則未作任何承諾」（Wu, 1997）。反對 NCTM 課程標準的人認爲「新教材不僅欠缺平衡，而且師資水準不夠貫徹教學理念。在小組互動的學習上，教師自己需要對數學有更深入的理解，才能既不亂插手又能善於引導學生學到有用的東西」（李國偉，2001）。雖然大家對教師要再進修有共識，但在不同的數學觀和教學觀之下，教師進修與成長的重點與方向的爭議也不會停止。

三、本質的爭議

不論是成效的爭議或是作法的爭議，最後都會觸及本質的爭議。陳竹村（2000）賦與新課程一個名稱——「發展式數學課程」，以突顯新課程的精神及有其理論架構，而非只是教學法的改變。他也賦與傳統數學課程一個名稱——「定義式數學課程」，並且比較了傳統數學課程和發展式數學課程之間的優缺點（表一）。

表一　傳統數學課程與發展式數學課程的比較摘要表

	傳統數學課程	發展式數學課程
教學主張	下定義，解說概念，教師示範解題，學童模倣。	教師佈題，學生自行解題，以形成概念，引入算式等數學語言做爲概念的表徵。
概念發展	概念未必形成與提昇，即概念未必有發展。	肯定概念有形成與提昇，即概念必有發展。
缺點	(1)由於大多數學童沒有概念的形成與發展，故所習得的數學符號也不具意義。 (2)「示範-模倣」的教學就像給學童「魚」吃，而不是教學童釣「魚」，養成學童在面對新問題時，總是等待別人的示範解題。 (3)由於「示範-模倣」的教學過程中，不確定學童已理解或學會，故造成不知不覺中學童被遺棄了而沒有跟上進度。	(1)由於學童使用自己發明的解題策略，當然顯得較笨拙。如果考試的試題須要在有限的時間內快速的計算時(不知這樣的考試是評量數學能力，還是評量反應速度的能力)，學童的考試成績在低中年級會較不理想，但在高年級則未必。 (2)由於「在需要快速計算能力的考試」中，尤其在低中年級階段，成績比較差，故必須面對家長、學校主管及同事的質疑。你是教師，你有說理的能力嗎？還是要屈服？
優點	對於考試成績的表現有速效，故而易於維持教師的聲望。	(1)由於概念有發展，必然促成智力成長。 (2)眞正的理解(自己發明的辦法，不是別人示範的)，可以長久記憶。 (3)養成遇到問題主動探索、尋求解答的習慣。
備註	誇張的說，像是在餵學生毒藥來維持學習，當停止餵食即停止學習。	教書者的良心，爲了學童日後的學習著想。

「定義式」與「發展式」的名稱，點出了傳統數學課程和新數學課程之間的本質上的差異。「定義式數學課程」是以數學形式結構和邏輯關係的角度組織知識而產生的，它的一般教學模式是由教師下定義，解說概念，示範解題，學童模倣。透過背誦公式（如九九乘法公式）或訣竅，反反覆覆練習的計算題，重視結果的精確性與數學的結辯（Mathematical Closure），定理都是根據定義來證明的。「發展式數學課程」是以學生認知爲本位發展出來的，它的一般教學模式是由教師佈題，學生自行解題，以形成概念，引入算式等數學語言做爲概念的表徵。新數學課程的教學盡可能不告訴學生正確的解法，解題的過程重於答案正確不正確，鼓勵學生列出自己認爲可能的解法，甚至在課堂上熱烈討論不同解法的優缺點，爲的是讓師長了解學生的認知歷程，也讓學生在討論的過程中能夠欣賞、學習別人的解題策略。據此，前述（「壹、前言」的部分）強調同儕討論互動與記錄建構過程的建構式教學法，在本質上是屬於發展式課程的教學模式，而使用「發展式數學」來稱呼新數學課程，不僅可以點出新課程的本質，也可以避免一般將「建構式數學」等同「建構式教學」所造成的混淆。

然而，鍾聖校（1998）認爲「定義式數學」爲新數學課程的基礎，先接受定義性數學的規範，才能玩算數！他認爲圖像思考強且易分心的小孩宜先從定義性數學開始入手，數字運算基本法也不是玩出來的，而是對數字規則、韻律的掌握。況且幼兒學習主要依據是增強原則，易接受定義性數學，而定義性數學也有利自動化。他並且引用 Meyer 的話：「……確定學生基本技能的使用，達到自動化境界，才給予複雜的解題作業，但在此過程中，允許學生有時候能享受解題的自由」，來質疑新數學課程的重點：建構式數學似乎與此相反，它先著重享受解題的自由，再允許學生有時候做自動化練習，是高估國內孩子的數學運算基本能力。

從數學的形式特性，鍾聖校認爲若算數命題或數學定理的本質，是沒有實質內容，而建構式數學老是要強調數運算與生活經驗世界的關聯或巧思（雖然，它們之間有某種關聯），則深受這態度洗禮的學子，在進入小學高年級以至國中、高中，碰到那種只能憑皮亞傑所謂「形式運思」（formal operation）就得解題的題目，恐怕會有困難。其中之一就是學生會不斷地探問：數學演算及推理，在人文經驗世界中的意義是什麼？不懂可能就難以進一步學習。他轉述某位北師附小高年級老師的話，提到接受新數學課程的孩子，有兩個特徵（1）演算數很慢（有時，是不必要的慢）；（2）對別人較高明（有效率、簡潔、容易導至精確）的解題方式不會欣賞，不會參考學習，反而沈溺於自己的「發明」。同樣，《倫敦數學

委員會》1995年10月提出的報告（http://www. qmw. ac. uk/ ~lms/tackling/report.html），也指出英國數學教育改革造成新一代的學生（1）嚴重缺乏必需的技術能力—即流暢和精確地從事數值和代數計算的能力；（2）當需要進行運算一步以上的簡單數學題時，分析能力顯著下降；（3）對什麼是數學的理解發生變化，尤其是對數學中精確性和證明的本質的理解發生變化（引自 Wu, 1997）。由此可見，課程所持的數學觀與教學觀的不同，是造成當前新數學課程在成效及作法爭議的主因。

面對兩種觀點的相互質疑，有一點可以肯定的，不論對數學思考（mathematical thinking）的理解爲何，「定義式」或是「發展式」課程的目的都是要培養出學生的數學思考能力。因此，要釐清爭議，必須回到本質的探討，對數學思考的特性有深入的瞭解。

參、數學思考與數學學習

一、數學思考的特性

Thompson（1985）提出一個理論模式，認爲數學知識是以過程和對象爲特徵的。這個理論主要建立在 Piaget 的反思抽象概念上，並作了推廣（引自 Dreyfus,1990）。Sfard（1991,1994）也提出了類似的理論，認爲數學學習的內容即數學概念具有對偶性（dual nature）。Gray 和 Tall（1994）稱它爲過程-對象對偶體（procept），這是經由過程（process）和作爲對象的概念（concept）這兩個詞進行「整合」而得出的一個新詞，而其主要特徵則就是對於「過程」與「對象」這樣兩個側面的一種整合。這種數學思考中過程-對象對偶的特性，意指在數學中有不少概念在最初是作爲一個過程得到引進的，然而，它們最終則又轉化成了一種對象，這些對象被關係聯繫著，它們是對象結構的部分。對此我們不僅可以研究它們的性質，也可對此施行某些新的數學運作，所以過程可說是由對象的運作組成，它們使對象發生改變，在這些變換下，結構也有可能發生變化。例如，函數的概念在學校數學中最初是作爲一種對應法則得到引進的，它是聯繫定義域中的元素和值域中的元素的一個過程；然而，隨著學習的深入，函數不再僅僅被看成一個過程，而且也被認爲是一個特定的數學對象。對此我們不但可以具體地去指明它所具有的各種性質（如單調性、奇偶性、周期性等），也可以此爲對象去實施各種新的數學運作（如微分運算、積分運算等），進而也

出現新的性質（如可微性、可積性），新的結構（如 Banach 空間、Hilbert 空間）。

「過程」與「對象」之間的轉化不應被看成一種單向的運動，這兩者構成了同一數學概念心理表徵的不同側面，而且，這正是數學思考的一個重要特點。即我們應當善於依據不同的情景在這兩者之間作出必要的轉換，包括由「過程」轉向「對象」，以及由「對象」重新回到「過程」。例如，在求解代數方程時，我們顯然必須將相應的表達式，看成單一的對象，而並非一個具體的計算過程。然而，一旦求得了方程的解，作爲一種檢驗，我們又必須將其代入原來的表達式之中去實行具體的計算，我們這時所採取的就是一種「過程」的觀點（鄭毓信，1999）。表二列出了 Tall 對這種整合特性的一些實例，有助於我們瞭解這種在「過程」和「對象」之間的相互依賴、互相轉化的辯證關係。

表二 過程-對象對偶體的示例

符　號	過　程	對　象
3+2	加法	和
-3	減法	負數
3/4	除法	分數
3+2x	值的計算	代數式
$v=s/t$	求比值	比
sinA	求三角比值(=對邊/斜邊)	三角函數
$y=f$(x)	求對應值	函數
Dx/dy	求導數	導(函)數
$\int f(x)dx$	求積分	反導函數
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\end{array}\right\}$	求極值	極限值
c_m^n	求組合數(從 n 個元素中選出 m 個)	組合數(個數爲 n 之原集合其個數爲 m 之子集的個數)
方程式f(x)=0	解方程式	方程式的解

資料來源：**數學教育的現代發展**（頁 116），鄭毓信，1999，南京：江蘇教育。

二、過程-對象對偶的特性與數學學習

Dreyfus（1990）認爲數學知識複雜的原因之一是大多數數學概念會根據問題的情境及學習者對概念的理解起著過程或對象的作用。特別是，學習一個概念可以分爲許多階段，開始是進行具體條件下的過程的運算。學習者熟悉了所給的過程後，這個過程就變成可以在頭腦中進行的一系列運算的形式，學習者就已達到這個概念的思維運算。再進一步，該過程的思維意象結晶成一個整體，一個新的對象。一旦達到這個階段，學生可把這個概念看成動態的過程或靜態的對象。這能使學生考慮多種可能性：實施或不實施某種運算會產生什麼情況？由此，學習數學的最基本的手段之一就是對象化：從過程抽象出對象。課程的主要目的就是要發展運算思維，思考與施加在對象上的運算有關的過程。我們從下列的案例，更可以瞭解這種過程-對象對偶的特性在數學學習中所扮演的角色：

小明目前就讀某國小二年級，媽媽爲了要瞭解他是否學會乘法，出了幾道題目讓他做，小明雖然都做對了，但速度太慢了。媽媽看到小明算 8×7 時，從 8+8=16，8+16=24，8+24=32，……，一路累加得到 56 的答案。接受傳統教學但瞭解新課程著重過程與理解，而非答案與死記的媽媽，一方面想要幫小明讓計算速度變快，一方面想要瞭解兒子的思考過程，因此用了下列的對話——

媽媽：2×8 等於多少？

小明：8+8，16。

媽媽：2×7 等於多少？

小明：14。

媽媽：9×2 等於多少？

小明：9×2 就是 2×9。就是 18。

媽媽：5×3 等於多少？

小明：5×3 就是 3×5。5、10、15，就是 15。

媽媽：4×8 等於多少？

小明：4×8……8×4。2×8+2×8 就是 16+16……32。

媽媽：8×9 等於多少？

小明：8×5 是多少？5×8……5、10、15、……40。40+32 等於……72。

…………

媽媽覺得小明已經理解乘法的意義，因此按捺住焦急的心，沒有要求他背誦九九乘法表。

在上述案例中，小明能熟練地進行交換、拆解、組合，算出各個題目，但速度慢。速度慢的原因在於小明多少必需透過累加的過程，無法自動化地得到乘法答案。可是，如果按照 Nickels 和 Livingstone （1985）所指出，學童獲得數字相關概念的三個階段（一為建立事實；二為在有充分時間思考時能給出答案；三為能迅速地回憶起答案）來看，小明獲得乘法表尚欠臨門一腳。如果我們把 8×9 這個符號，從過程-對象對偶體的角度來看，它是學童執行 8 乘 9 的一個過程，這個過程可能是一步一步累加的過程；或者，單純是 72 這個積的概念，它能由學童迅速靈活地反應，不受過程的約束。雖然小明大部份的時間在進行累加，但偶而將乘法轉化成了一種對象，並對它施行運作（如交換），他正在尋求過程與概念（對象）之間關係的意義，所以充分的思考時間是重要的，媽媽按捺住焦急的心是正確的。但是，我們必需繼續要求小明的速度，以測試他是否已能靈活地進行過程-對象對偶的思考（proceptually thinking）。因為，僅把乘法概念理解為累加過程，日後建構指數函數概念就很困難（Confrey, 1988; 引自 Dreyfus, 1990），因此小明如果沒有能更進一步，將會影響日後的學習。

如果像是鍾聖校（1994、1998）文章中提到他小孩的情況，鍾教授的處理是正確的：教孩子一些捷徑，例如傳統的直式（加、減、乘、除）計算方法、教九九乘法表等，免得小孩的認知負荷太重。他的小孩從「先知道答案再玩弄過程」的應付型態，到重新用直式練習建立基礎，使運算基礎較熟練、正確、穩固，因而可以參與建構式數學課程的各種挑戰（詳見鍾聖校，1994、1998）。從鍾教授小孩的案例，可以知道尋求過程與對象之間關係的意義，是需要充分的工作記憶空間，一些捷徑或機械記憶，可降低認知負荷，有助意義的尋求。而熟練、正確、穩固的運算基礎，應該是過程與對象之間轉化的一個必要條件。在鍾教授小孩的案例中，所謂「先知道答案再玩弄過程」，筆者認為是利用捷徑得到「大程式」、「小程式」（朱建正；引自陳恆光，2001）的結果，將它們當成對象，降低認知負荷，而利用多出的工作記憶空間，玩弄（尋求）這些對象間的關係。最後當「小程式」成為對偶體和反覆練習時，「大程式」也就成為對偶體。然而，Wong（1994）以理論分析說明了數學規則和運算程序之教學不能沒有涉及概念理解。他指出不少數學教師認為學生必先有穩固的運算或處理數式的基礎，才能進而掌握有關之數學概念及關係，因此他們傾向教授運算規則而

不涉及概念理解。這種「規則先於理解」的信念，在小學或成績低下的班級中，更顯強烈。但是抽離意義的教學方式，長期來說只會帶來更多的學習問題和困難。Wong（1994）從心理學角度考察進行或重覆運算程序時的認知過程，及信息加工時記憶容量的限制等，認爲符號及相關程序的意義可以引導程序的進行或讓處理過程流暢。另一方面，他又從哲學的角度，藉著「物體-符號-概念」此一「數學認知的三角關係」，說明數學知識的獨特性及其與意義溝通的關係。具此可知，在僅從算法規則或符號操作出發的數學課程，事實上會將學習者的經驗完全限制在「符號」的面向，而使學習者將努力嘗試掌握當成約定的程序，而不依靠它們的意義。因此 Wong（1994）認爲在教學情境中只有當「概念」面向分別與「物體」和「符號」面向建立適合的關係，從而在張力中保持必要的區別時，數學的概念性/理論性知識可以完全地被發展起來。可見機械式的練習是不能保證能進行過程-對象對偶的思考，傳統課程的弊端就是它剝奪了學生反思的機會，使得靠著重覆操練凝固下來的對象與對象之間，無法形成有意義的關係，使得這些對象極易遺忘；而轉化成對象的過程也非有意義（機械式的練習），使得它只能在有練習過的條件下運作，一旦問題超出常軌，過程便無法運作，更別說是過程與對象之間的轉化。因此，將捷徑意義化，讓「小程式」成爲對偶體，是需要學生自覺的反思，我們必須給他們機會。

由上述兩個案例可知過程與對象之間的轉化並無固定的方向和軌跡，每位學生的特質不一，而「教師幫助學生學習特定的數學概念有不同的風格和策略」，因此「對教學而言，並不存在一個『正確方式』」。例如，具體表徵可以幫助許多學生的學習，但對八歲大的天才 Terence Tao（Clements, 1983）具體表徵反而會擾亂他。當問到一個給定的結構是否爲環（ring）時，他立刻透過定義完成證明。似乎，傳統定義式數學反而適合他的發展。然而，我們要強調，從上述的討論，並未得到應該恢復以往被詬病的機械式練習的教法。雖然用大量習題進行練習，除了強化概念，讓學生變得熟練計算，並發展一個某些事是錯的感覺之外，練習也可能會有引發學生去凝聚一個過程傾向；但是，如果學生不理解，沒擁有以及沒建構一個合適的基模，那麼大量練習之後，不正確的詮釋將被強化，而教師之後將付出大量代價在努力糾正學生的誤解。因此老師仍要注意學生擁有什麼概念，以及注意當他們開始進行練習時，什麼被確切地強化，產生的錯誤類型爲何。總之，讓學生朝向有意義地學習，「選擇和使用合宜的課程內容、使用適當的教學工具和技術、從事反思性的實踐和持續地自我增

進，是優良積極的教師每日需做的。」（NCTM, 2000）。

肆、數學課程也是一種對偶體

NCTM（2000）在其課程原則中認爲數學教學設計應當突出重要的和有意義的數學，並設計出協調的和綜合的數學課程。所謂重要的和有意義的數學是指從數學本身、從數學在數學以外的應用、和從認知發展等角度決定的。而所謂課程的協調性和綜合性則分別是指課程中的各個部分應密切相關，而不應是互不相干的；整個課程應在各個對立環節之間實現較好的平衡。顯然，這是針對各界對於（NCTM（1989）課程標準）欠缺平衡的批評的一種反思。據此，我們不應僅將八十五學年度所全面施行新課程的結構視爲「類似學科的『發生邏輯』而非學科的『組織邏輯』的方式組織的」（甯自強，1993）。如前（詳見本文「貳、當前『建構式數學』的爭議」部份）所述，不依數學觀念的邏輯順序來教學，可能會把數學貶低到工具的地位，看不出數學概念彼此之間的關連與完整性，也無法達到練習思想精準有條理的作用；而完全依邏輯順序，將使大多數學童沒有概念的形成與發展，所習得的數學符號也不具意義。因此，我們需要的數學課程，是能夠平衡學科的「發生邏輯」和學科的「組織邏輯」的方式組織的。

事實上，在數學課程理論和數學課程改革的淵源，蘊藏著對偶的結構。1789年法國大革命後，爲新社會開創新的學校體制，之後，德國大學也仿傚法國大學，於是到後來，文法學校的課程成了問題，一種綜合理論應運而生。1810-1819年間的 Humboldt 改革，發展出「Bildung（教育）」的觀念，它既可以理解爲知識的總體，也可以理解爲教育的過程（Howson, Keitel, & Kilpatrick, 1981），是一種對偶體。由於 Humboldt 的改革努力，爲德國大學提供了新型數學教育的典範，其成立的柏林大學在後來成爲以 Weierstrass 爲首的柏林數學學派。再從20 世紀美國數學課程的發展來看，課程組織方式大概是在心理性組織方式和論理性組織方式之間擺蕩。20 世紀初，最先居於主導地位的是 Dewey 的哲學，主張以兒童的活動和經驗爲中心進行教學，雖然其間有 Bobbitt 推廣 Taylor 工作分析的思想與之競爭，但直到二次世界大戰，其主導地位的局面才有所轉變。轉變的原因是從新兵暴露出對數學、科學嚴重的無知，以及社會對教育的需要（Howson, Keitel & Kilpatrick, 1981）。於是，Bloom 分類方法以及 Gagné 的學

習類型與任務分析在課程發展中抬頭。1957 年俄國人造衛星升空，更暴露出美國數學課程偏重從學生心理發展的角度進行組織的方式之不足，學校數學課程與現代數學發展嚴重脫節，無法滿足社會對教育的需要。因而 Bourbaki 的哲學進入了數學課程改革之中，產生了所謂的「新數學」運動。「新數學」學校數學的內容是建立在一個現代的、堅實的、完全充分的知識體系的基礎上，並與任務分析結合，來組織數學課程，此時，課程組織方式已擺蕩到論理性的一端。但在這一端，數理邏輯公式、群的概念、交換律、結合律等等課程內容的編排與教導，又脫離了學生的心理發生，學生無法進行有意義的學習，進而宣告「新數學」的失敗。之後，數學課程又從 70 年代的「回到基礎」，80 年代的「問題解決」，在 20 世紀末逐漸擺回到從心理性組織課程的方式，強調學生建構面的一端。數學課程發展這種在心理性組織方式和論理性組織方式之間的擺蕩與數學概念發展的在過程和對象之間不斷地變化，似乎具有某種同構的關係。

因此，類比於數學概念應整合過程和對象而成爲過程-對象對偶體的想法，數學課程應該也是一種對偶體才是，筆者稱它爲發展-定義對偶體（devinition）。它是經由發展（development）和定義（definition）這兩個詞進行「整合」而得出的。這種數學課程組織中發展-定義對偶的特性，意指在數學課程中，許多的數學概念最初是學生透過適合認知發展的活動，由經驗建構的，然而，它們最終則又轉化成了一種形式定義，這些定義被邏輯關係聯繫著，它們是數學結構的部分。對此我們不僅可以學習在設定的條件下透過特定的法則推演它們的性質，也可對此設計某些新的活動，以使學生在規範經驗中發展與建構新的概念。同樣，「發展」與「定義」之間的轉化不應被看成一種單向的運動，這兩者構成了同一數學課程組織方式的不同側面。課程設計者應當善於依據不同的情境在這兩者之間作出必要的轉換。因此，數學課程的目的既是要與學生已有的知識和經驗有關，是爲了要設計出一個發展的過程；同時，也是要學生承續數學結辯的形式精神，並掌握具體的數學知識和技能。

Kilpatrick（1997）認爲「當學校數學課程被仔細檢查時，緊張關係有時會出現。當然，雖然在兩極之間總是存在著意見的譜系，但是這些緊張關係可以表成對立兩極。某些人偏愛純粹數學，其它人偏愛應用數學。某些人希望教數學的方式就像他們學的時候一樣，其它人希望有不同的方式。某些人主要是關心發展數學家的下一個世代，其它人主要是關心所有人的數學素養。對某些人而言，最重要的意義是數學演繹的一邊；而其它人更喜歡經驗的、易誤的、文

化的一邊」。過去，傳統數學課程偏向「定義」的側面，造成學生只有在特定的框架中、文化傳承的依靠中才會解題，大都「知其然而不知其所以然」；學生無法有意義地形成數學概念，使得概念模糊不清；機械式地練習，因而忽視推理思考。新課程為了除弊，在推展的過程中特別強調了「發展」的側面，「帶給數學學習領域一股新氣象，帶給許多適合它的小學生許多愉快的數學經驗」(鍾聖校，1998)。然而，數學課程複雜的原因之一是課程設計與執行者需根據學習的情境及學習者的特質對組織方式的理解起著「發展」或「定義」的作用。從小明的案例和鍾教授小孩的案例中，我們更可體會課程活動的複雜性。所以，如果我們一再偏向「發展」的側面，「時代」雜誌的標題：「這算是數學嗎？」「數學突然有趣好玩了，但是孩子真的學到了東西嗎？」仍會是許多人的疑問，而目前的爭議仍會持續。

伍、結語

在歷經「數學戰爭（李國偉，2001）」後，NCTM 透過網路發表學校數學的原則和標準（Principles and Standards for School Mathematics）的討論稿，號召全國的數學教師提出意見及懇求各數學專業團體（如 American Mathematical Society）的意見，終於在 2000 年 4 月出版了學校數學的原則和標準。NCTM 認為（NCTM（1989）課程標準）「和任何教育改革一樣，『標準』的觀念已被許多不同的方式詮釋，並用各種不同的忠誠度來加以實施。有時以『標準』為名的改變是表面的或不完整的。例如，某些源自 NCTM 標準的教育觀念——諸如強調交談、值得做的數學任務、或透過問題解決學習——已被實行，卻沒有對學生數學內容的理解有充分的注意。移往 NCTM 標準最初方向的努力，決未在適當的地方徹底地發展或穩固」(NCTM, 2000)。於是 NCTM 對過去暴露出來的弊病或是由於不同的詮釋而出現不應有的現象進行必要的改進。例如，於前所述課程失衡的現象，已在課程原則中強調協調性和綜合性；過去過分地強調了某些教學形式（如小組合作學習），已在教學原則中強調教學活動的創造性，留給教師充分的自主權；前些年在數學教育中特別強調學生的興趣，而今在學習原則中明確地提出學習未必是件樂事，也需全身心的投入與辛勤的工作的觀點……等等。NCTM 有智慧地化爭議為助力，改進和發展之前的標準，繼續堅持基本立場（即應使學生 1.學會認識數學的價值；2.對自己的數學能力具

有信心；3.具有數學地解決問題的能力；4.學會數學地交流；5.學會數學地推理）和建構主義的精神，再度凝聚了全美數學教育工作者的共識。我國當前「建構式數學」所引發的爭議，在透過理性地對話和討論後，深信也將會是我國數學教育的助益。

參考文獻

李國偉（2001）。**台灣教改起風波，美國同樣掀起數學戰爭**。取自 http://scc. bookzone.com.tw/news /news9/index.htm。

陳竹村（2000）。發展式數學課程及其教學觀。**研習資訊，17**（5），15-46。

陳恆光（2001）。**「建構式數學教學法主旨」著重學科精神，跳脫硬背模式**。取自 http:// www.ckids. com.tw/news_10226.htm。

陳香蘭（2001）。**孩子變笨了，國小建構式數學掀論戰**。取自 http://bel.udnnews.com /2001/2/16/news /todaynews/focus/165971.shtml。

陳榮裕（2001）。**建構式數學 老師家長一頭霧水**。取自 http://ctnews.yam. com.tw/cgi-bin/fineprint.pl?file=/news/200102/18/106188. html。

甯自強（1993）。「建構式教學法」的教學觀——由根本建構主義的觀點來看。**國教學報，5**，33-41。

黎慧琳、廖淑惠（2001）。**蔡式淵：建構式數學 出現負面效應**。取自 http://be1.udnnews.com/2001/4/4/news/domestic/north-taiwan/hsinchu/228576. shtml。

鄭毓信（1999）。**數學教育的現代發展**。南京：江蘇教育。

鍾聖校（1994）。從兒童認知能力看小學數學實驗課程的實施。**研習資訊，11**（4），52-59。

鍾聖校（1998）。論小學數學科建構式教學的普遍適用性，**研習資訊，15**（2），12-18。

鍾靜（1993）。**小學數學新課程實驗階段之實施現況研究**。教育部委託研究計畫報告。

鍾靜（1994）。**小學數學新課程低年級實驗之實施現況研究**。教育部委託研究計畫報告。

鍾靜、朱建正（1995）。國小教師面對數學新課程之因應。**國教學報，7**，1-16。

謝蕙蓮（2001）。**學者呼籲勿強迫老師採單一教學模式**。取自 http://bel.udnnews. com/ 2001/2/16 /news/todaynews/focus/165973.shtml。

Clements, J. (1983). A conceptual model discussed by Galileo and used intuitively by physics students. In D. Gentner & A. L. Stevens (Eds.), *Mental Models* (pp. 325-340). London: Lawrence Erlbaurm Associates.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick, (Eds.), *Mathematics and Cognition*. Cambridge Univer. Press.

Gray,E., & Tall,D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 115-141.

Howson, G., Keitel, C., & Kilpatrick, J.(1981). *Curriculum development in mathematics.* Cambridge Univer. Press.

Kilpatrick, J. (1997). Confronting Reform. *The American Mathematical Monthly*, *104*(12), 955-962.

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics***.** Reston, VA: Author.

Nickels, W., & Livingstone, J. (1985). *Practical ways to teach mathematics*. Ward Lock Educational.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies of Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A., & Linchevski,L. (1994). The gains and pitfalls of reification—The case of algebra, *Educational Studies of Mathematics*, *26*, 191-228.

Wong, K.M. (1994). Can Mathematical Rules and Procedures be Taught without Conceptual Understanding？*CUHK Primary Education*, *5*(1), 33-41.

Wu, H.(1997). The mathematics education reform: Why you should be concerned and what you can do. *The American Mathematical Monthly*, *104*(12), 946-954.