教育研究資訊
2002年12月 10卷6期 頁111-132

教室中的數學論證之研究

陳英娥

摘 要

這是一個進入數學教室去探究國中學生的數學學習的研究。研究的主要目的是瞭解學生數學論證能力發展的情形和釐清學生的學習困難。本研究主要的方法是教室觀察法。研究對象選取兩個國二班級54位學生，收集的資料包括教室觀察雜記、學生論證的紙筆作業、教學現場的錄影帶。本文是這個研究的部分結果。主要報導學生在乘法公式單元中在紙筆作業上的論證情形以及在論證活動中的表現。研究結果發現學生在紙筆作業和後續的論證活動兩種情境都表現出資料數據、推論依據、理論支柱以及結論等四個論證元素。但是，學生在論證活動中表現的論證元素內涵較爲多元，尤其是在紙筆作業上未出現的合格者、反駁者等相關的論述，在這裡的表現都相當豐富。綜合言之，學生在論證活動所得到的論證經驗比紙筆作業所能提供的更爲充分、更爲完備。而學生在乘法公式單元，主要的學習困難是對於「恆等式」的不了解。

關鍵詞：論證、數學論證、代數學習

陳英娥，輔英科技大學助理教授
收件日期：91年8月29日；接受日期：91年12月3日

Educational Research & Information
Volume 10, Number 6 2002.12

A Study Of Argumentation in The Mathematical Classrooms

By
Chen, Ing-Er

Abstract

This study investigates students' learning characteristics in the mathematical classrooms. The purpose of the study is to understand students' argument abilities, to identify learning difficulties of algebraic argument, and to find out the key point why students fail. The sample, consisting of 54 eighth-grade students at a junior high school in the southern of Taiwan are required to judge, in writing and discussing, the validity of the equations. Classroom observations are conducted and transcribed. The observation notes and students' learning profiles are collected. Data analysis is in line with Toulmin's framework of argument (1958). The results of this study are as follows: the elements appearing in students' argumentation in the two contexts include data, warrant, backing and conclusion. The other two elements, qualifier and condition of rebuttal, do not appear in paper-pencil context but in the activity context. Students' argumentation in the activity was more sufficient and complete than it in the paper-pencil context. The analysis of classroom dialogues shows that the main difficulty of students learning on multiplication formula results from the lacking of understanding on the identical relation.

Key words: Argumentation, Mathematical Argument, Algebraic Learning

Chen, Ing-Er, Assistant Professor of Fooyin University

壹、緒論

一、 研究背景

新的課程理念強調有意義的數學學習，重視學生的理解與數學推理，因此，發展各種有利學生學習的教室情境成爲重要的需求。在九年一貫課程綱要中，學生的主要學習方式與思考型態的特徵分成四個階段，第一階段－具體操作：視覺(1-3 年級)。第二階段－具體表徵：察覺型式(4-5 年級)。第三階段－類化具體表徵：辨識型式間的關係(6-7 年級)。第四階段－符號表徵：非形式化演繹(8-9 年級)(教育部，2000)。這四個階段中的每一階段，都含有豐富的數學論證在裡面。透過操作式說明作論證是最基礎的論證形式；察覺型式、辨識型式之間的關係兩階段都蘊含著豐富的論證活動；而非形式化的演繹，則是非常典型的論證活動。在五大主題的能力指標(C-S-3)中也明確指出希望學生能熟悉解題的各種歷程，包括：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推廣、驗證、論證等等。而事實上，這些論證活動在目前的國中教室中非常少見。

陳英娥（1998）曾經針對一組六個程度中下的國二學生做過一個數學臆測能力發展的研究，發現要讓學生的能力穩固，把說理變成一種習慣，不是一件容易的事，也許需要提供更多的教室活動使學生獲得充分的經驗才足以達成。有關數學論證的學術研究，提出一些主張包括：論證過程在概念化的重要性（Douek, 1999）、學生在論證內容相關的學習活動（猜測、解釋、證明）的表現（Duval, 1991; Douek & Scali, 2000; Krummeheuer, 1995; Yackel, 1998; Yackel, 2001;Yackel & Cobb, 1996）以及發展學生的論證技能的複雜性（Douek, 2002）。這些研究有的強調論證在發展數學思維的重要性，有的探討發展學生的論證技能可能發生的困難。但是，對於如何在教室中發展學生的數學論證的能力並沒有具體的討論。新課程的每一階段都強調學生的論證思維，現況中，學生數學論證的學習特性如何？數學論證的能力如何培養？這些問題仍待基礎研究進行了解。在期待教師設計與發展教室活動的同時，極需要教室中的基礎研究提供教師作爲發展教學的參考或依據。

本文從 Toulmin(1958)的論證架構來展示數學論證的特性，從認知的角度及社會的角度探討數學論證的相關研究，並且以實例介紹數學論證活動的內涵。

因此，首先要界定數學論證的意義，接下來，描述如何把 Toulmin 的論證架構作爲方法學的工具，用來分析教室的學習。之後，以國中數學教室的研究爲例，探討學生在教室論證的表現以及教師在教室論證活動中的角色。

二、研究目的與研究問題

本研究主要目的是瞭解國中學生在課本第三册各單元之論證能力發展的情形和代數論證的思維特性，以了解學生的學習困難。本文探討國二學生在乘法公式單元的論證表現。主要探究的問題包括：

1.學生在乘法公式單元的教室論證中表現了那些重要的論證元素？

2.學生在乘法公式單元的學習困難關鍵在哪裡？

貳、數學論證的理論基礎

一、數學論證的意義

〝Argument〞是指支持或反對一個命題、意見的理由(Webster)，它可以是語言的論證、數值資料或圖畫等等。Douek（1999）把 argumentation 這個字界定爲兩件事：第一是指產生一個邏輯相關的對話過程，這裡所指的邏輯相關，不一定是演繹，也可能是歸納、類比或其他思維方法或推理的連結；第二是指經由上述的討論過程所產生的、寫下的或說出的那個論點。偉氏字典中建議依對話的情境選擇適當的意義。因此，一個論證(argumentation)是由一些有邏輯相關連的論點(arguments)構成的，argumentation 常被拿來和形式證明作比較，即把證明化約到經過某種推理得到一個結論的過程。在此推理過程中，從起始資訊推到結論的過程所用來支持結論的證據，可能是邏輯的，也可能是一些推理規則或數學定理，但不一定是演繹的。從此觀點考量，不論是探討論證的過程(argumentation)與論證的成果(arguments)，兩者都是爲了回答「爲什麼」的問題而產生的一個合理判斷的思維過程或成果。因此，數學論證活動對發展學生的數學思維具有重要的意義：它涉及到猜測和反駁的過程，是產生形式證明過程的一個重要部分(Douek, 1999)。

二、論證的過程與數學的概念化

論證在概念化過程中具備那些功能，Douek 與 Scali(2000)的研究「論證在建構國小數學概念時具備不同的功能」中有詳細的描述 。他們在 Vergnaud（1998）對於概念的定義和 Vygotsky（1962）之科學概念的精緻化意義之下，探討論證如何干涉基本概念的建立以及潛意識的和系統的連結。他們設計五個二年級的教室活動作爲提供這些分析的證據。對於 Argumentation，他們的觀點是：假如我們要考慮論證在概念化的角色，我們必須重新思考論證在數學活動的定位是什麼，不只是聚焦在它的邏輯結構，而是在論證時學生使用了哪些參考知識（reference knowledge）。在 Vergnaud 概念的定義和 Vygotsky 關於概念的精緻化意義之下，概念化被視爲一個複雜的過程，它由概念的分量的構成、不同概念間的關聯、以及關於概念的潛意識的發展組成。

（一）經驗、參考經驗和論證

當一種經驗它涉及到在某一論證中被用來當作解釋、證實或對照某個給定的概念的論點，它就視爲某一給定概念的參考經驗。這個判準可以用在與基本概念的建立有關的基本經驗，也可以應用在高階形式和抽象的經驗。依據這樣的判準，要成爲某一給定概念的參考經驗，這種經驗必須以一種有意識的方式和此概念的符號表徵相連結（爲了有意地成爲在論證過程中使用的論點）。依這種方式，必須去建立某一給定概念之參考經驗的構成與它的符號表徵之間的必要功能的關連。論證正是建立這種關連的重要方式。

透過教學的過程來發展論證的技能和構造概念的參考經驗時，論證被視爲發展一種經驗到一種參考經驗的方法。這其中利用兩個連結的方式：1.學生關於經驗中的概念的觀點和意識；2.經驗中的概念的表徵符號。這兩種方式使得表徵的語意更易被理解，並且把經驗和學生有意識的知識網路關聯起來。而如果我們需要參考經驗來支持或作爲論點，則我們必需回顧到關於某一給定概念相關的論證過程。

（二）論證和操作變項

論證的功能依賴教師的中介，當學生被要求清楚地描述程序和他們在解題過程中使用的條件時，他們被允許去做外顯的操作變項並且保證是有意識的使用。比較各種不同的解題程序是發展意識的一種重

要方式。透過這些論證活動，不同的操作變項可以被比較，並且和適當的符號表徵相連結，從而顯示此論證系統之重要觀點。而概念作為一種系統的內在本質也因此被增強。

（三）論證、識別和概念的關聯

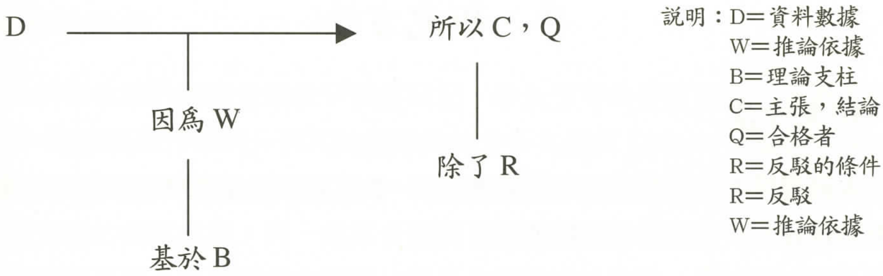
論證可以同時保證概念的辨識之必要性以及他們之間系統相關聯的必要性。這兩種功能是相關的：論證允許接近概念之操作變項和符號表徵的分離。(參考 Douek, 1998, 1999 的例子，關於表達太陽高度的論證允許去區分用尺測量「高度」和用量角器量的「用角度量的高度」，而以相同的方式可能建立「接近」概念之間的關聯。)

三、論證的理論架構

論證的研究在最近四十年有重要的發展。不同的研究觀點也發展出不同的理論架構。這些理論架構包括：論證的語用論（pwagmatics）分析－「為了取信的論證（argumentation to convince）」（Toulmin, 1958）和論證對話的句法（syntactic）分析－語言關聯的多重對話 “polyphony of linguistic connectives”（Ducrot, 1980）。

其中，有一些研究已經考慮到數學活動的論證特性，例如：Duval(1991)關於論證和證明的認知分析，Krummeheuer(1995)關於論證互動的成份(interactive constitution of argumentation)以及 Yackel(1998, 2001)在解釋與證實過程中的互動論證，這些都是本研究的重要文獻。本研究主要的內容是為了取信的論證，因此採用 Toulmin 的論證架構。

在數學教室中，我們希望了解學生用來支持知識主張的理由和證據。但是，能否說出理由和證據仍無法作為判斷的依據。我們必須確認這些理由和證據是否以某種方式呈現，是否能為所呈現的知識主張提供一個完備的理性論證。Toulmin（1958）提出一個分析科學論證的架構（見圖一）。Toulmin 的論證架構包含六個可能的論證元素，以及論證元素之間的關係。其中，最基本的元素是資料或數據（D, data）、推論時得到的結論或主張（C, conclusion or claim）以及推論時的推論依據－論據（W, warrant）。另外三個元素是－合格者（Q, qualifiers）、潛在反駁的條件（R, conditions of rebuttals）和理論支柱（B, backing）。



圖一　Toulmin 的論證分析架構

一個合理的論證主要是由資料數據、推論依據、理論支柱以及結論四個元素構成（Toulmin, 1958）。科學家在構造其論證時，典型的必須給定大量的資料數據，依據這些資料數據得到一個主張或達到結論。他們被期待以推論依據來保衛他們的結論，而這些推論依據通常是有理論支柱作為解釋基礎的。

在區分推論依據和理論支柱時，Toulmin 的解釋是：理論支柱通常保持不證自明的，它是在論證的外面，是被挑戰之前就已存在的。理論支柱指涉權威化理論根據的事實（即允許從資料到結論的推論）。除此之外，理論支柱可以為不同領域和不同學科的論證提供依據。根據問題的特性和所提供的資料，科學家必須去界定額外的合格者或假說，即在什麼特別的條件下，結論會成立。最後，一個完備的科學論證會被拿來說明一些潛在的反駁之辯論。依照 Toulmin（1958）的說法，即使所有這些元素不須外顯，一個論證如果不具備所有這些元素，它將被視為是不完備的。

有了這個分析架構之後，我們就可能來構造一個數學論證的參考模型，界定它的元素，以及論證活動中這些元素之間的關係。這個論證的模型也可作為比較的模版，用來分析學生面對問題時所提出來的論證。

綜合言之，上述的文獻為本研究提供重要的基礎，但是對於論證能力的學習與發展的探究仍然相當缺乏。本研究引用這些文獻的重要發現並且嘗試去設計並進行教室的論證活動。首先，本研究分析學生在不同論證情境的表現，接著，探究個人和班級論證的特性及其完備性，以及交互論證如何影響和貢獻在個人或整個班級的數學學習。本研究也檢驗九年一貫課程綱要中的代數能力指標的適當性，並且分析教師在數學論證活動中的角色，這些研究結果將提供我們開發教室論證環境的重要依據。

參、研究方法

一、研究方法

本研究採用的方法主要爲教室觀察法。教室觀察包括整個班級教學活動的錄影和錄音，研究者也在現場作觀察日記。

二、研究對象

本研究選取兩個國二班級 54 位學生和任教該班的數學教師爲研究對象，在平常上課時間觀察整個教室活動中的對話。該班的任課教師在之前曾參與過數學猜測的探究教學研究。根據之前的經驗，他熟悉論證教學的目標和教學取向。

三、課程內容和教室活動

本文報導的課程內容主要是國中數學課本第三冊（1998）之乘法公式單元。教室情境是：教師 T1 要學生完成 1-1 乘法公式單元中改寫過的四個隨堂練習的問題，之後說明想法。紙筆作業完成後，接著進行論證活動。紙筆作業的內容如表一。表一的內容是課本隨堂練習的改寫，比課本多了「判斷的理由」這一欄。主要目的是經由此欄了解學生的推論依據、理論支柱或其它的論證想法。

表一　論證紙筆作業的內容（乘法公式）

判斷下表中左邊的等式是否正確，並且寫出判斷的理由。

等　式	對	錯	判斷的理由
1. $(2+3)^2=2^2+3^2$	□	□	
2. $(a+b)^2=a^2+b^2$	□	□	
3. $(a-b)^2=a^2-b^2$	□	□	
4. $(3-2)^2=3^2-2^2$	□	□	

四、資料分析

本研究收集的資料包括教室觀察日記、學生學習的書面資料、教學現場的錄影帶。論證紙筆作業的分析和論證活動的分析主要採Toulmin的論證架構（見圖一)。本研究採用敘事分析的方式，將教室中的師生對話或生生對話分析成許多小而完整的段落敘事，再一起結合成爲一個論證過程的敘事，以呈現教室中代數論證的原貌。若是段落中需要分析學生認知掙扎的點，則採認知因子的分析架構加以處理。

肆、研究結果與討論

本節將以國中數學教室的研究爲例，分析學生在教室中作論證的表現以及教師在論證活動中的角色。

一、研究結果

（一）學生在紙筆作業上的表現

學生在處理第 1 題 $(2+3)^2=2^2+3^2$ 是否正確時，有 50 人回答〝錯〞。回答〝對的〞4 人說不出理由。大多數學生算出等號左右兩邊的數値，再作比較；有些套用 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，再作比較。第 2 題 $(a+b)^2=a^2+b^2$ 是否正確，學生套用 $(a+b)^2$ 的公式，再作比較，也有些是設定 a、b 爲某些數字，代入檢驗。第 3 題 $(a-b)^2=a^2-b^2$，學生的表現與第 2 題類似。第 4 題 $(3-2)^2=3^2-2^2$，學生有的引用第 3 題的結果，有的直接算出數値作比較。綜觀這四題的論證，以第 2 題判斷 $(a+b)^2=a^2+b^2$ 是否正確，最具代表性。學生在第 2 題的表現如下：54 位學生中，有 7 位學生沒有作答；3 位學生作出結論，但是無法提出推論依據；8 位學生提出數字例檢驗等式是否成立，例如：

代入 $a=2,b=3, (a+b)^2=25, a^2+b^2=13, (a+b)^2 \neq a^2+b^2$ ；

36 位學生提出乘法公式作爲理論支柱來支持結論，例如：

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，左邊的式子和乘法公式不同。

其中有四位將乘法公式寫錯。

從上面的分析，可以發現學生在紙筆作業上的論證相當一致，數字例的檢驗和套用乘法公式是他們判斷等式是否成立的主要推論基礎。

（二）學生在論證活動中的表現

在後續的教室論證活動中，判斷等式$(a+b)^2=a^2+b^2$是否成立？學生直接引用第 1 題的結果，例如：「*和第 1 題一樣， 2=a，3=b，這樣是錯的*」（S_9），也有的提出數字例檢驗等式是否成立，例如：「*a=0，b=0 是對的。*」（S_1）、「*用別的數字算算看，第 1 個數字例 a=2，b=3 代進去不對。*」（S_6）。對於似乎兩者皆有可能的答案， S_1 建議：「*a=0，b=0 代數字進去算，結果是對的。a=2，b=3 代第一題進去，是錯的。*$(a+b)^2$ *不等於* a^2+b^2」。S_6 建議：「*都不要選*」。S_{19} 動搖她原來的想法，說：「*好像也成立*」。對於看起來好像對又好像錯的情形，S_6 說：「*無解*」。至於為什麼無解？他說：「*理由是用猜的！*」。S_{28} 反駁大家的想法，因為「*錯！用（乘法）公式來看，少了 2ab*」。這時，S_{19} 又動搖了，她說：「*算式裡面要減掉 2ab。*」。此時，一個有趣的回答出現了，S_7 說：「*這是先人提出來的耶，不尊敬前人*」。他在大聲維護數學家提出來的乘法公式怎麼可能有錯。此時，教師 T_1 介入打圓場，他說：「*他（S_1）不錯啊！那是他提出來的，也許那先人講錯，怎麼辦？*」。S_{15} 支持 S_7 的說法，他大聲回答 T_1：「*那樣也是沒有用啊！*」。這時有人插播：「*老師，他說前人種樹後人乘涼。*」，惹得全班哄堂大笑。

上面這一段對話顯示數字例的檢驗和套用乘法公式還是典型的推論基礎。但是，有學生使用範例規則；有學生提出反對或支持的例子；也有學生想法一直擺盪或者訴諸權威。

這段有趣的討論原案轉錄資料如下：

1077 S_{19}：算式裡面要減掉 2ab。
1078 S_7：這是先人提出來的耶，不尊敬前人。
1079 T_1：他不錯啊！那是他提出來的，也許那先人講錯，怎麼辦？
1080 S_{15}：那樣也是沒有用啊！
1081 S_9：老師，他說前人種樹後人乘涼。
1082 S：（哄堂大笑）
1083 T_1：S_{19}，剛剛妳講的少了 2ab，然後怎麼樣？

1084 S_{19}：因為它那個是………。

1085 S_1：a=0，b=0 可以。

1086 T_1：它可以是 a=0，b=0 沒有問題。好，S_1 你來算一下 a=0，b=0 。

1087 S_1：$(0+0)^2=0^2+0^2=0$，$0^2=0$，0=0。(寫在黑板上)

1088 S_{15}：那就不用算了啦！

1089 S：他為什麼要用 0？

1090 T_1：有沒有人不同意？

1091 S：………。

從上面的對話，可以看到討論的焦點變得混亂，S_{19} 還在講少了 2ab 的事情，S_1 還在想：$(0+0)^2=0^2+0^2=0$，$0^2=0$，0=0。*a=0，b=0 是對的。而* S_{15} 還是叫大家：那就不用算了啦！此時，有好幾個聲音同時說：「*他（S_1）為什麼要用 0？*」，之後，大家的討論聲音吵雜，無法辨識。後來，教師 T_1 介入，確認討論的焦點。

1100 T_1：他把你們說的全部反駁掉了，那你們認同嗎？認同他的想法嗎？

1101 S：不認同！

1102 T_1：為什麼不認同？

1103 S_6：因為可以用 1,2，用 3,4，都不對啊！

1104 S_{19}：他想太多了！

1105 T_1：那他的想法對不對？

1106 S_6：不一定要用 0 啊！

S_1 的想法是值得成為討論議題的，但是，顯然他的意見沒有受到同學的重視。教師 T_1 再次介入提問：「*那 S_1 的想法對不對？*」，S_6 反駁說：「*不一定要用 0 啊！*」；S_{19} 反駁說：「*也可能是一個 0，一個 1。*」。討論聲音又亂成一團，太多學生同時講話，聽不清楚，無法辨識。

這一段論證，大家都在質疑並反駁 S_1 的想法。有的質疑的論證並不恰當；也有的反對卻提不出理由。

大約一分鐘後，聲音變清楚了。S_2 說：「*規定不能 0 的時候，選錯就成立了*」。S_{15} 和 S_6 還幫腔：「*如果每個都是 0，算數學要做什麼？*」(S_{15})、「*數學就等於零了！*」(S_6)，許多同學大聲回應：「*對啊！對啊！*」，之後又是一陣哄堂大笑。教師 T_1 接著說：「*好，回來，剛剛你（S_{19}）講 0，*

0，然後0，1，現在把它講清楚一點！」。S_{19}解釋她的想法是一不一定是0，S_1如果要寫的話，中間應該要寫2乘以0再乘以0 。S_6接著建議：「*那就不要用0算啊！*」，教師T_1再一次複述S_1的想法：「*這邊是他（S_1）提出0，0，是對的，你們都說錯啊！那怎麼辦呢？*」。這個時候，S_{15}的回答改變了，他從之前：「*那樣也是沒有用啊！*」；「*如果每個都是0，算數學要做什麼？*」，變成：「*啊，對錯都可以啦！*」。T_1問他（S_{15}）：「*那你是贊成他的答案，對錯都可以？*」，S_{15}沉默不語 。T_1又問其他學生：「*還有沒有人對這個說法有意見的？有沒有其他意見，反駁的？*」，S_{28}回答：「*用0算的話，後面全都是0。*」。大部分學生也都反對S_1的想法，他們說：「*那就不用算了啦！*」、「*老師兩個字，無解啦！*」、「*對錯都可以。*」、「*不然就用別的數字算算看啊！*」、「*我選中間，無解。*」。

這一段論證，大家還在質疑並反駁S_1的想法。S_2的論點是值得延續討論的，但是並未引起其他學生的注意。而大多數反駁的聲音是說不出推論依據的。

後續的討論中，S_6提議再用別的數字算算看。S_2說：「*第1個數字例a=2，b=3代進去不對，就不成立了，不必再算*」。S_7也下了結論：「*只是0的時候是對的，在不能0的時候不成立。*」。S_{28}還在想剛剛S_{19}提出的想法並且舉例檢驗：$(0+2)^2=0+2^2$，$2^2=4$，4=4。S_{19}把之前〝*也可能是一個0，一個1*〞的想法再作推廣：〝*$(0+a)^2=a^2$，只要有一個是0就對了，但是，如果在那裡（乘法公式）就不能成立，少2ab。*〞。他還是堅持要用乘法公式作爲判斷的基礎。這段精采的對話原案如下：

1138 S_2：第1個數字例a=2，b=3代進去不對，就不成立了。

1139 T_1：他說a=2，b=3就不成立了。

1140 T_1：好，現在有什麼結論？

1141 S_{28}：老師，……………………………（聽不清楚）

1142 S_7：只是0的時候是對的，在不能0的時候不成立。

1143 S_{28}：$(0+2)^2=0+2^2$，$2^2=4$，4=4。

1144 T_1：你的意思是說a 是0，b是2，代進去就等於了？

1145 S_{19}：$(0+a)^2=a^2$，只要有一個是0就對了，但是，如果在那裡就不能成立，

1146 S_{19}：少2ab。

接著，S_7又複述他的結論，並且說出一句本節最關鍵的一句話：「*只有0的時候它是對的，其他都是錯的，那錯的時候比較多啊！*」。教師T_1在這裡的介入極具爭議，他銜接並且複述S_7的話說：「*這邊就是0跟0，對的有幾個？*」、「*那0跟2對不對？*」、「*好像也對啊！那對的多還是錯的多？*」。接下來，學生開始爭辯對的情況多還是錯的情況多。

1154　S_7：只有0的時候它是對的，其他都是錯的，那錯的時候比較多啊！

1155　S：(哄堂大笑)不錯哦！

1156　T_1：你說這邊就是0跟0，對的有幾個？

1157　S_{15}：一個啊！

1158　T_1：那0跟2對不對？

1159　S_{15}：錯啊！

1160　T_1：好像也對啊！那對的多還是錯的多？

1161　S：一樣多。

1162　S：錯的多。

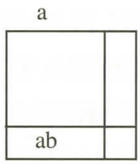
1163　S：………。

這一段討論原來是很有建設性的，但是T_1和S_7的對話讓討論模糊了焦點，偏離了主題。學生在對的情況多還是錯的情況多的討論時間持續約一分鐘，教師T_1又問：「*有沒有理出觀念了？*」，結果S_2回應：「*就在不能0的時候成立。這裡沒有規定要用乘法公式，如果有規定要用乘法公式，就不成立；如果沒有規定要用乘法公式，就是對的。*」。T_1問他：「*那你的答案要改對嗎？*」，S_2回答：「*沒有！*」。他還是堅持用乘法公式來判斷，所以不成立。最後S_{19}問T_1：「*老師你的答案是什麼？說來參考一下！*」，T_1回答：「*你要參考嗎？事實上答案他（S_2）剛剛已經差不多講出來了，他沒有把它釐清楚而已。a=0，b=0 成立對不對？但是a=2，b=3 不成立，那只要有一個例子不成立，就可以說等式不成立，不就結束了嗎？*」。T_1的回答之後，學生的反應是：「*老師你明明知道，爲什麼不講？*」、「*對啊！*」、「*對啊！*」。等式$(a+b)^2=a^2+b^2$是否成立的討論在此結束。

接著第3題的討論受到第2題的影響，本來寫錯的，現在開始改對。也有人大聲反駁：第二題錯啦！可見，討論至此，眞正的認知關

知關鍵點還未解決。

S_7已經改變主意了，他說：「因為沒有事先聲明 a，b 皆不為 0。所以乘法公式幾乎都不成立。因為乘法公式是在 a、b 不等於 0 的狀態下成立的。」。這一說引出另一個關鍵的問話：「乘法公式有規定 a，b 不等於 0 嗎？」。S_7回答：「a，b 皆不為 0。」。S_{19}支持S_7的說法，並且明確表達她的理論依據：「畫一個圖案，它就不能成立了。...，就像課本那樣啊！…，如果用課本的圖 來解釋，邊長 a 不可能是 0，邊長沒有 0，等於 0 圖形就沒有了。」。



1198 S：第二題錯啦！

1199 T_1：等一下，為什麼第二題對？

1200 S_7：全部大於 0 了。

1201 S_7：因為沒有事先聲明 a，b 皆不為 0。所以乘法公式幾乎都不成立。因為

1202 乘法公式是在 a、b 不等於 0 的狀態下成立的。

1203 S：乘法公式有規定 a，b 不等於 0 嗎？

1204 T_1：有嗎？

1205 S_7：a，b 皆不為 0。

1206 T_1：為什麼 a，b 皆不為 0？

1207 S：..................。

1208 T_1：好，你再慢慢想，沒關係。

1209 S_7：頭很痛了！

1210 S：被一個 0 打敗了。

1211 S：(哄堂大笑)

1212 S_{15}：老師，以後考試的時候出一個 0 就好了。

1213 S_{19}：畫一個圖案，它就不能成立了。

1214 T_1：怎麼講？

1215 S_{19}：就像課本那樣啊！

1216 S：畫快一點！

1217 S_{19}：可是我畫不準啊！

1218 S_{15}：好啦！大概畫一下，圖只是參考用而已。

1219　S_{19}：如果用課本的圖來解釋，邊長 a 不可能是 0，邊長沒有 0，等於 0，

1220　S_{19}：圖形就沒有了。

1221　T_1：你們有什麼意見？

1222　S_{15}：a=0，b＝0 就對了。

1223　S_{19}：可是那不能用圖形解釋啊！

1224　T_1：贊成對又贊成錯是不是？

1225　S_{15}：老師，那個圖只是參考用而已啦！

T_1 問大家對 S_{19} 的說法有什麼意見？S_{15} 說：「*a=0，b＝0 就對了。*」；S_{19} 反駁說：「*可是那不能用圖形解釋啊！*」；S_{15} 尋求 T_1 的支持：「*老師，那個圖只是參考用而已啦！ …老師，有的題目是有圖，有的沒有圖啊！*」。S_7 支持 S_{19} 的說法：「*那個圖是用來解釋乘法公式的，不能用來解釋這個。*」。接下來，有人建議沒有圖就用推的嘛！大家又吵成一團，此時，正好下課鐘聲響起，這節討論到此結束。

綜合上面所描述的學生在教室論證活動中的表現，可以發現他們提出數字例檢驗等式是否成立，但是這些例子比紙筆作業上的表現更加豐富。另外，也有學生提出乘法公式作爲理論支柱來支持結論，例如：「*用* $(a+b)^2=a^2+b^2$ *來看，少了 2ab。*」「看乘法公式，相差 2ab。」。這部分的表現和紙筆作業上的表現類似。但是，若與在紙筆作業上的表現相比較，學生在論證活動中的交互論證刺激他們提出更多的問題，也凸顯了一些重要的想法。例如：「*乘法公式有沒有規定 a、b 不等於 0？*」；「*沒有規定要用乘法公式，如果有規定要用乘法公式，就不成立；如果沒有規定要用乘法公式，就是對的。*」；「*如果用課本的圖來解釋，邊長 a 不可能爲 0，等於 0，圖形就沒有了。*」；「*如果每個都是 0，算數學做什麼？*」；「*所以，對錯都可以。*」。這些想法，值得教師作爲診斷教學的參考。

針對上面學生的論證，可以發現：在乘法公式這個單元，學生主要的認知困難是因爲對於「恆等式」的不了解。所謂恆等式是說代入任何數進去時，那個等式都會成立。當學生在判斷等式 $(a+b)^2=a^2+b^2$ 是否成立時，他們不知道只要找到一個例子不成立，就可以說等式不能成立。而課本中用圖來解釋乘法公式，所以 a，b 在此情形下都是正數。這是特殊的情形，只是來幫助學生了解。其實，單就乘法公

式本身來講，它可以用分配律導出來的，在導出的過程中，與 a，b 的正負無關，所以 a，b 不只可以爲 0，甚至可以爲負。課本以文字與圖像雙方面並進，希望能夠減輕學生的認知負荷，結果卻引出另一個認知的問題。

（三）學生在教室論證中表現了那些重要的論證元素

1.學生在紙筆作業上表現的論證元素

學生在紙筆作業（a＋b）^{2}＝ a^2＋b^2 上表現的論證元素，如圖二所示。包括：推論依據 W1、W2，理論支柱 B1、B 2 和結論 C1。除此之外，在第1、3、4題學生的表現與第2題類似。這樣的結果與Toulmin（1958）所謂之一個合理的論證主要是由資料數據、推論依據、理論支柱以及結論四個元素構成吻合。但是，其中並未出現合格者的條件、反駁的條件等相關的論述。

資料 $(a+b)^2 = a^2+b^2$ → 結論 C1 $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

因爲 W1
代入 a=2,b=3,
$(a+b)^2=25$, $a^2+b^2=13$,

因爲 W2
和乘法公式比較
少了 2ab

基於 B 1
等號的左右兩邊不相等
等式不成立

基於 B2
乘法公式
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

圖二　學生在論證作業上表現的論證元素

2.學生在論證活動中表現的論證元素

學生在論證活動（a＋b）^{2}＝ a^2＋b^2 中表現的論證元素，如圖三所示。包括：推論依據 W1、W2、W3、W4、W5，理論支柱 B1、B 2、B3、B 4、B 5，合格者 Q1、Q1，反駁者 R1 和結論 C1 、C2、 C3。接著第 3 題的討論受到第 2 題的影響，因爲眞正的認知關鍵點還未解決，所以許多的討論又回到原點。相近的討論不再贅述，值得一提的是，

其中一段關於文字與圖像的認知功能的精彩論證。這一段出現了精彩的反駁包括：反駁 R2－如果用課本的圖來解釋，邊長 a 不可能為 0，等於 0，圖形就沒有了；反駁 R3－有的題目是有圖，有的沒有圖；反駁 R4－圖是用來解釋乘法公式的。這樣的結果符合 Toulmin（1958）所謂之一個合理的論證主要是由資料數據、推論依據、理論支柱以及結論四個元素構成的說法。但是，若與在紙筆作業上的表現相比較，則不僅推論依據、理論支柱和結論都更為多元，其中在紙筆作業上未出現的合格者、反駁者等相關的論述，在這裡的表現都相當豐富。

只是 0 的時候是對的，
不能 0 的時候不成立。

如果有規定要用乘法公式，
就不成立；如果沒有規定
要用乘法公式，就是對的。

合格者 Q1

合格者 Q2

資料 $(a+b)^2=a^2+b^2$

結論 C1 $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$
結論 C2 $(a+b)^2 = a^2+b^2$
結論 C3 對錯都可以

因為 W1
和(1)一樣
2=a, 3= b,
是錯的。

因為 W 2
a=2,b=3,
$(a+b)^2=25$,
$a^2+b^2=13$,

因為 W 3
看乘法公式
相差 2ab

因為 W 4
a=0，b=0，
2ab=2×0×0
0=0

因為 W 5
$(0+2)^2=0+2^2$，
$2^2=4$，4=4
（a=0，b≠0）

基於 B 1
範例－規則
範例不對，
規則不對。

基於 B 2
等號的左右
兩邊不相等
等式不成立

基於 B 3
乘法公式
$(a+b)^2=$
$a^2+2ab+b^2$

基於 B 4
範例－規則
範例對，
規則對。

基於 B 5
範例－規則
範例對，
規則對。

反駁 R 1
如果每個都是 0，
算數學做什麼？
數學就等於零了！
規則不對。

圖三　學生在論證活動中表現的論證元素

學生在合格者的論述相當有趣，而且所提出的質疑：「*乘法公式有沒有規定 a，b 不等於 0？*」，判斷 $(a+b)^2=a^2+b^2$ 等式是否成立「*有沒有規定要用乘法公式？*」，可能是教師在課堂中容易忽略的問題。因爲一切是那麼理所當然，或者教師並不認爲需要解釋。而從學生在論證過程提出的反駁，可以發現多數訴諸權威，包括教材是唯一標準以及數學知識不容有錯的權威地位。

綜合言之，學生在論證活動中的表現，在 Toulmin 的論證架構意義之下，六個可能的論證元素都出現，而且多元。因此，學生在論證活動中所獲得的論證經驗比紙筆作業所能提供的更爲充分、更爲完備。

二、綜合討論

（一）數學論證的分析架構

上述教室中的論證所傳達的是一個班級學生嘗試去達到共識的解的過程。當某一學生建議想法，其他學生可能忽視這些想法、同意這些想法或者挑戰它們。爲了讓這些敘述不會馬上被拒絕或被忽略，教師有必要把這些想法訴諸一個集體確認的過程；而在使用一些標準或判準來作判斷時，教師也應照顧到學生所支持的論證的完備性。

Toulmin(1958)的分析架構爲本研究中學生所做的論證是否完備提供一個這樣的判準，這對於檢驗學生的論證成果是非常有用的。但是，它不見得適合用來分析學生的論證過程，特別是用來捕捉學生群體發展數學論證的那個動態過程。因此，對於交互論證的分析必須再尋求另一架構。

（二）國中代數能力指標：乘法公式

在本研究進行之初，研究者希望能在研究結果出來之後回頭檢視學生論證能力的內涵，即分析學生在教室中作出什麼表現就表示他們具備代數論證的能力，作爲修訂代數能力指標 A-1-1～A-4-12 的依據。

首先，關於 A-4-8 能使用乘法公式。暫行綱要中只寫了〝透過具體表徵，認識乘法公式。〞。國中數學課本第三册乘法公式單元介紹了四個公式。從數學結構來看，這四個公式都可以用分配律導出。在此單元，課本爲了照顧學生認知理解的困難，將抽象的數學公式具像化，希望學生能從具體操作中體會乘法公式的原理。因此，乘法公式

是由面積來看的。依據本研究結果，學生在透過圖形表徵，認識乘法公式時是有一些學習問題的。例如，他們關於「乘法公式有沒有規定 a，b 不等於 0？」的討論。

又，課本第 15 頁隨堂練習中把學生常犯的錯誤列出，讓學生去判斷是否正確。教師手冊中明示：讓學生自行試作，再共同訂正。希望學生能判斷某式子是否正確。事實上，本研究發現學生在判斷等式是否正確時，是有困難的。這些困難，光看學生的紙筆作業是很難看出來的，更何況原來的教材只列了判斷對錯而不須寫出判斷的理由。因此，如果隨堂練習的型式繼續存在教材中，本研究建議：在表格的右方增加「判斷的理由」這一欄。而且進行的方式不只是讓學生自行試作，再共同訂正。最好能提供學生論證的機會，讓教師可經由論證活動了解學生的推理和認知障礙。本研究中，學生 S_1 提及：「當 $a=0$ 或 $b=0$ 時，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 可成立」，正好引出學生是否了解這些乘法公式是恆等式的觀念的一段論證，也讓本研究了解雖然恆等式並非本節的教學重點，但是學生的困難卻出現在這裡。

因此，A-4-8 能使用乘法公式。本研究建議充實內涵如下：

1.能透過具體表徵，認識乘法公式。

2.能用分配律，導出乘法公式。

3.能檢驗、判斷等式是否正確並描述其意義。

4.能了解乘法公式是恆等式。

（三）教師在論證活動中的角色

在數學教室中，數學的確認和理解被視為是最重要的，而促進數學教室社群的建立時，教師扮演非常重要的角色。而且，教師身為數學社群的代表，對於在教室社群中建立和磋商某一數學解釋或證實是否可被接受，具有重要的責任(Yackel & Cobb, 1996)。本研究探討學生的論證表現，當然不容忽視教師在論證活動中的角色。在本文描繪的教室論證活動中，教師 T_1 有多次的介入，並且提出一些關鍵性的問話或評論。整理如表二。從表二，我們可以看到教師在論證活動中的角色是多元的。當教室內的權威阻礙論證機會時，教師必須出面當個協調者；當討論的焦點變得模糊或者討論中斷，此時教師必須扮演監控者，拉回主題、確認討論的焦點或延續話題，以維持活動順利運作；

當雙方意見僵持不下，教師必須是個仲裁者，爲雙方提供辯論機會，避免多數否定少數；當學生的論點未受重視，教師爲了提醒學生注意，有時必須是個複述者，而當學生的討論觸礁並尋求支持時，教師是個協助者，適時提供學生需要的說明。因此，本研究中教師 T_1 在論證活動中的表現，本研究給予正面評價。但是，在銜接並複述學生的問話：「*對的多還是錯的多？*」時，教師 T_1 未察覺這是不當的問話，可能導致學生對恆等式的不當概念，以及使學生在論證過程中的思考方向離焦，則是値得注意的。

表二　教師在論證活動中的角色分析

問題情境	教師關鍵提問或評論	教師角色	研究者的評論
學生將推論依據訴諸權威：這是先人提出來的，不尊敬前人。	S_1 不錯啊！那是他提出來的，也許那先人講錯…。	協調者	避免教室內的權威阻礙論證機會。(＋)
討論的焦點變得混亂：他(S_1)爲什麼要用 0？	S_1 把你們說的全部反駁掉了，那你們認同嗎？	監控者	拉回主題，確認討論的焦點。(＋)
多數學生不認同，又說不出爲什麼。	那 S_1 的想法對不對？	仲裁者	爲雙方意見提供辯論機會，避免多數爲主。(＋)
學生將推論依據訴諸權威：如果每個都是 0，算數學要做什麼？	這邊是 S_1 提出 0，0 是對的，你們都說錯啊！那怎麼辦呢？	協調者	避免教室內的權威阻礙論證機會。(＋)
S_{15} 的回答改變了：「啊，對錯都可以啦！」	那你是贊成他的答案，對錯都可以？	確認者	確認學生的想法。(＋)
討論中斷。	還有沒有人對這個說法有意見的？有沒有其他意見，反駁的？	監控者	監控活動流程，維持活動順利運作。(＋)
延續 S_7 的話：那錯的時候比較多啊！	那對的多還是錯的多？	複述者	銜接論證話題，未察覺不當的問話。(－)
模糊焦點：爭辯對的多還是錯的多。	有沒有理出觀念了？	監控者	拉回主題，確認討論的焦點。(＋)
S_2 回應：在…的時候成立。…就不成立。	那你的答案要改對嗎？	確認者	確認學生的想法。(＋)
S_{19} 問：老師你的答案是什麼？說來參考一下！	他(S_2)…沒有把它釐清楚而已。…，那只要有一個例子不成立，就可以說等式不成立。	協助者	提供學生需要的說明。(＋)
S_{19}：如果用課本的圖…，邊長 a 不可能是 0。	大家對 S_{19} 的說法有什麼意見？	監控者	監控活動流程，維持活動順利運作。(＋)

伍、結論與建議

本研究使用 Toulmin 的論證架構作爲一個方法學的工具來探究教室中的學習如何進展，研究結果發現教學生認識和作出有效的數學論證是一項重要的挑戰。對許多學生而言，要作出合理的論證是很困難的。因此，我們必須從研究和教室活動中獲取經驗，尋求幫助學生增進技能和獲得他們所需要的理解的方式。如果可以做到這一點，教師就多了一種重要的教學取向，並且爲學生在數學的這一項重要元素上的進展提供機會。

此外，論證在概念化的過程中的功能要發揮功效需要教師的中介。爲了能聚焦在概念化過程中的關鍵點，教師必須提供適當的學習材料；爲了能聚焦在問題或者將問題情境轉移到某測驗概念的操作變項的參考情境，教師在和學生作一對一的互動時，必須提供適當的論證方向的引導；爲了能爲後續的活動作準備，教師必須適當地選擇那些學生的成果適合用來作比較或者作爲教室中討論的議題；爲了能將重要的關鍵點浮現出來，引起學生的注意，教師必須隨時注意討論的進行並且事先做一些安排。論證的行動者可以不同，論證可能發生在師一生一對一的互動之間，也可能是教室討論中學生對話的重要成份，也可能是某一個別學生的成果。每一種不同的論證都具有它的特殊功能。

致謝

本研究承蒙行政院國家科學委員會專題計畫補助經費（計畫編號 NSC 90-2521-S-242-001），在此致謝。

參考書目

教育部（2000）。**國民教育九年一貫課程綱要—數學學習領域**。台北市：教育部。

陳英娥(1998)。 **數學臆測：思維與能力的研究**。國立台灣師範大學科學教育研究所博士論文，未出版，台北市。

國立編譯館（1998）。**國民中學數學教師手冊第三冊**。台北市：國立編譯館。

Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: Analysis of some undergraduate mathematics students' performances. In O. Zaslavsky (Ed.), *The proceedings of the 23nd conference of the international group for the psychology of mathematics* *education Vol.2* (pp. 273-280). Israel: Haifa University.

Douek, N.(2002). Context complexity and argumentation. In A.D. Cockburn. & E. Nardi (Eds.), *The proceedings of the 26th conference of the international group for the psychology of mathematics education Vol 2* (pp.297-304). England: East Anglia University.

Douek, N., & Scali, E.(2000). About argumentation and conceptualization. In T. Nakahara & M.Koyama (Eds.), *The proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education Vol. 2* (pp.249-256). Japan: Hiroshima University.

Duval, R. (1991). Structure du raisonment deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

Krummeheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1998) . Toward a cognitive theory of practice. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick, (Ed.) , *Mathematics education as a research domain : A search for identity (Book 1)* (pp. 227-240). England: Kluwer Academic.

Vygotsky, L. S. (1962) . *Thought and Language*. Cambridge: Massachusetts, Massachusetts Institute of Technology Press.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996) . Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education , 27 (4)* ,458-477.

Yackel, E. (1998). A study of argumentation in a second-grade mathematics classroom. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *The proceedings of the 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education Vol 4* (pp.209-216). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *The proceedings of the* (pp. 9-24). Utrecht University, The Netherlands：Freudenthal Institute.