

國小教師對周長與面積單元課程 資源運用之研究

陳嘉皇

摘 要

本研究旨在探索國小教師運用「學習軌道」(learning trajectories, LTs) 當成教學工具，比較其學習 LTs 前後對課程資源的運用情形？研究問題包含「周長與面積」單元有關教學目標的設定？「周長與面積」LTs 的臆測與數學概念分析？對學習的作業做何種調整的行動？運用何種表徵協助學生學習？如何對學生數學解題的策略進行解釋？研究對象為臺灣中部某公立小學之 A 師，採質性描述方式進行探討，分析的資料來自訪談教師之文稿與省思日記。研究發現教師於 LTs 學習前之目標設定強調以計算能力培養之課程內容取向，對學生學習軌道之臆測以長方形周長與面積公式之計算應用為主，學習 LTs 後則以實測與圖形要素關係理解之學生思考作為導向，學習軌道路徑為：測量與計算線段的長度→理解長方形圖形構成的要素→理解長方形周長公式並應用解題→理解 1 平方公分代表的意義→理解長方形圖形面積構成的要素→理解長方形面積公式並應用解題。研究結果對於教師「如何」進行課程資源運用，與教師進行的課程資運運用內容是「什麼」，提供明確、成功的範例。

關鍵詞：周長、面積、學習軌道、課程資源

A STUDY ON HOW AN ELEMENTARY SCHOOL TEACHER USES CURRICULUM MATERIALS TO TEACH PERIMETER AND AREA

Chia-Huang Chen

ABSTRACT

The objective of this study was to explore whether elementary school teachers use course materials in a different manner after learning how to use learning trajectories (LTs). The research questions concern the setting of teaching objectives for the unit of perimeter and area in mathematics, the speculations and analysis of mathematical concepts with regard to the LTs of perimeter and area, adjustments in learning assignments, the use of representation to assist students and the means of explaining problem-solving strategies to students. The subject of this study was a teacher serving at a public elementary school in Central Taiwan. We adopted a qualitative approach in analyzing data from interviews with the teacher and the reflections in the teacher's journal. The findings indicate that before the teacher learned how to use LTs, the learning objectives were focused on strengthening the arithmetic of the students, and the speculation of student LTs primarily involved calculating and applying the formulas for the perimeter and area of rectangles. However, after learning how to use LTs, the focus shifted to gauging student understanding on the relationship among shape elements. The LT was therefore modified to the following procedure: measuring and calculating the length of segments, understanding the elements composing rectangle shapes, understanding the perimeter formula of rectangles and how to use it in problem solving, understanding the meaning of 1 square centimeter, understanding the elements composing the area of rectangle shapes, and understanding

Chia-Huang Chen (corresponding author), Associate Professor, National Taichung University of Education, Department of Mathematics Education.

E-mail: chench1109@mail.ntcu.edu.tw

Manuscript received: October 13, 2014; Modified: November 28, 2014; Accepted: January 22, 2015

the area formula of rectangles and how to use it in problem solving. The results of this study provide a clear and successful example of how a teacher employs curriculum materials and what the employment includes.

Keywords: *perimeter, area, curriculum materials, learning trajectories*

壹、緒論

有效教學最基本的條件在於教師能夠理解學生需要明白、學習的事物，然後支持他們接受挑戰以學得更好（教育部，2008；National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）。Darling-Hammond 等人主張，教學要能成功，那麼教師必須發展課程的事業，擁有「學生該往何處」與「學生如何與繼續完成」學習的感覺。能有效運用課程資源的教師，會對以下的狀況具備深度的理解：1. 大的數學觀念或課程目標，2. 學生用來達成這些目標的策略，3. 針對支持學生達成這些目標所運用、調整或創造課程材料的策略（Darling-Hammond et al., 2005）。課程資源運用一項重要的元素是課程的統整性，此連結可藉由師生、或橫跨課程內外之間的組織而形成。課程材料像是教科書，對於教師如何組織數學教學、提供學生良好學習，是項最基本的影響因素，因此教師不僅要熟悉教科書的運用，還應根據學生的需求、與對數學學習與教導所持的信念加以調整。

NCTM (2000) 之《學校數學的原則與標準》（*Principles and standards for school mathematics*）強調數學概念要能整合，課程不應只是活動的集合體而已，還需要以重要的數學概念為核心，將各年級之間的數學內容做良好的結合。NCTM 的主張可經由課程願景的發展與執行而達成，協助教師思考學生在整個學年期間可以學到的大概概念。例如，教師可詢問自己：教導分數概念時，該安排多少時間呢？活動如何設計與排序？另外的議題包含課程的焦點、不同數學議題之間的連結，與課程內容與教學法之間的關係，或如何傳達給學生等。

近年來，針對數學學習領域或議題，一些學者將注意力放在學習軌道（learning trajectories, LTs）或學習進程（learning progress, LPs）的結構上（陳嘉皇，2013；Clements & Sarama, 2004；Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012），以這些理論作為基礎而創新課程（Clements & Sarama, 2004），檢驗與改善既有的學習進程。Clements 與 Sarama (2004) 將 LTs 定義為：描述學生對某特殊數學議題的學習，透過相關教學工作的設計，想像學生解題的一些心智步驟或假設的行動當作支持學生學習目標的臆測路徑，讓學生經歷一發展性的思考層次前進。LTs 是種研究導向的理論，描述學生的思考如何隨著時間的變化，從非正式的概念逐漸轉變成複

雜的理解 (Confrey et al., 2012)。Simon (1995) 在其「學習軌道」概念中, 認為教師可根據學生的學習目標、學習任務與大腦思考等預期路徑構築一個 LTs, 教師實施的教學過程, 可提供發現學生實際的表現與 LTs 之間的符合程度。LTs 強調三個元素: 1. 明確與可辨識的目標, 先前的學習理論主要在於 (1) 應用相同的理論與步驟至所有的領域, 忽略不同學科的性質; (2) 要求課程透過既有的標準而接受目標, 相較之下, LTs 的目標同時以數學家的專業與學生對數學學習的思考兩者做為基礎, 因此, 數學領域與學生學習與思考的研究, 對決定數學的目標扮演基礎的角色。2. LTs 的發展是以思考層次的進展作為基礎, 當概念與技巧做網絡的內在連結時, 可反映出知識的認知科學觀點。每一個層次可藉由特殊的心智物件 (概念) 與行動 (步驟) 加以描述 (Clements & Sarama, 2004)。LTs 的功能在於督促教師對學生學習進程的目標, 需作詳實的分析與調整, 配合學生經驗與認知需求; 其次 LTs 可協助安排與設計合宜的學習路徑與任務, 臆測學生對學習任務可能產出的策略與思考, 掌握班級教學流程與互動; 再者 LTs 執行歷程強調的迭代與評估方式, 可明確學生學習的表現, 驗證任務設計之良窳。

數學研究社群證明 LTs 對課程的發展 (Clements & Sarama, 2004)、評量 (Battista, 2004) 非常有用, 也可用於師資培育與教師專業發展 (Sztajn et al., 2012)。LTs 提供教師發展數學教學所需的知識, 定義學生可以或能在軌道上進行學習的方法。雖然 LTs 提供教師以「學生的學習做為基礎」此觀念, 研究成果也與課程設計、教學實務做連結, 釐清學生數學學習的相關理論, 然而從課程資源 (如: 教科書、習作、活動、作業、工具、交互作用的形式與評量的方法) 利用的角度評論, 發現研究者建立的結果, 大多置於學生數學領域思考理解產出的啟發, 很少建立在教師如何理解、使用與執行 LTs 於教學或課程資源的議題 (Sztajn et al., 2012)。

國內對課程資源應用的研究大多集中於教科書內容跨國性之比較 (徐偉民、徐于婷, 2009; 楊德清、陳仁輝, 2011), 這些研究屬於意圖課程的分析, 並未探討教師在實務上如何使用教材、執行課程。雖然上述研究提供影響教師運用課程資源的因素, 提供先進國家教材發展與要點的比較, 但對數學教材的特徵最後如何用於教師教學實務, 仍有眾多問題待

解。以教學實務的焦點做為基礎，發現小學教師對課程資源的應用與實施，會將行動聚焦於教學目標的設定、學習活動順序的臆測與數學概念的分析、學習活動作業之增減、表徵運用、學生解題策略分析等面向，因此可將他們抽離做為研究的架構，透過比對與分析，理解教師如何利用 LTs 進行課程資源的運作。教學現場常發現學生在「周長與面積」此數學議題，對長方形之周長與面積概念會產生混淆現象、缺乏「等積異形」保留概念、不知周長與面積公式由來、誤用公式解題等問題，要改善上述困境，教師需有一有效機制協助不可，包含如何善用教學資源、提供有效學習策略與評量學生學習進展。針對此議題，本研究以 Clements 與 Sarama (2004) 的學習軌道理論為基礎，配合 Confrey 等人 (2012) 的周長與面積之 LTs 設計，用於教師專業發展，探討某國小教師透過 LTs 的學習，如何運用「周長與面積」之課程資源？如何連結教材的運用到對學生數學思考的解讀，進而改善其教學實務，提升學生數學成就。所謂「運用」，指的是教師面對多種不同相關的教學活動，如何與這些資源連結或交互作用，或依賴他們進行計畫與執行教學，與這些資源在教師實務裡扮演何種的角色。研究此議題的理由在於考量提供師資培育與教師進修研習的需要，讓教師能合宜的預期與反應學生解題的多樣性，增進教學所需的專業知識。基於此理念，本研究目的在於探索國小教師學習 LTs 當成教學工具，比較其學習 LTs 前後對課程資源運用的情形？為具體化研究結果，探討的問題如下：

- 一、對「周長與面積」單元議題，教師於 LTs 學習前後設定的教學目標為何？
- 二、教師對學生「周長與面積」LTs 的臆測與數學概念分析為何？
- 三、教師對「周長與面積」學習的活動作業，做何種調整的行動？
- 四、教師對「周長與面積」學習的活動作業，提供何種表徵協助學生學習？
- 五、教師對教科書提供學生數學解題的策略進行何種解釋行為？

貳、文獻探討

一、課程資源與教師專業發展學習

Remillard (2005) 認為教師在進行教學時會積極的說明與改變課程資源，此觀點是假設教師與課程資源會連結成一動態的伙伴關係，透過教師的特徵與課程資源兩者而影響教室的實務。從執行觀點來看，課程透過師生而創造，教師會解釋與藉由教材探索學生理解的差異，與課程資源運用的特徵，包括教師如何建構學生能探索的概念 (Lloyd, 1999)、教師的數學概念 (Lloyd & Wilson, 1998)、設計教學時對課程資源扮演的角色與教師所持的信念 (Remillard & Bryans, 2004)。因此有兩項議題與課程資源的運用有關：(一) 教師採取課程資源的方式，依賴對課程資源扮演的角色所持的信念 (Remillard & Bryans, 2004)、瞭解課程架構下的信條與目的 (Drake & Sherin, 2009)、與 (二) 教師對課程資源理解與應用的能力 (Brown, 2009)，可以改變教師探究學生如何連結此教材的結果。

(一) 教師採取課程資源的方式

教師獲取課程資源受到數學教學與學習有關的教師特徵、對課程資源扮演角色的信念、環繞課程資源運用的策略與實務、應用課程資源執行特殊教學形式之能力等因素而有影響。研究者對這些特徵的描述，包含「邁向課程資源運用的方向」(orientations toward the use of curriculum materials) (Remillard & Bryans, 2004)、課程願景 (curriculum vision) (Drake & Sherin, 2009) 與「教學設計能力」(pedagogical design capacity, PDC) (Brown, 2009)。

Remillard 與 Bryans (2004) 描述教師運用課程資源的信念，建議教師發展環繞課程資源所建立的實務。他們發現一些教師雖運用課程資源當成作業來源，但並未改變其教學與學習的實務；然而一些教師採取真實與統整的觀點，使用課程資源的建議並引導教學實務。當教師運用課程資源時，會發展一種藉由教材提供學習機會的理解，如 Drake 與 Sherin (2009) 提到的「課程願景」。Drake 與 Sherin (2009) 認為發展課程願景時，教師的策略—在教學的前、中、後期會對課程資源進行閱讀、評量與調整，

甚至改變。簡言之，當要發展目標的理解並提供課程資源時，教師的課程策略就會改變。Drake 與 Sherin (2009) 認為當教師改變他們的課程策略時，對運用教材去執行特殊教學的形式會更有能力，發展成如 Brown (2009) 關於運用課程資源的教學設計能力 (PDC)，Brown 敘述此能力是呈現教師知覺供給物、做決策與遵循計畫的技巧。PDC 呈現教師完成新事物的能力，提供學生統整與持續不斷的機會以發展概念理解，展現標準課程的目標。

Drake 與 Sherin (2009) 描述課程願景與專業願景的連結，此指涉專業論述與工具如何形塑專業的知覺、或察覺複雜的事物。課程願景是指涉教師經由知覺設計課程特徵之重點，解釋事件的能力。Drake 與 Sherin 注意到與 Remillard 與 Bryans (2004) 主張相似之處，即教師如何運用課程資源的改變當成執行教材的結果，特別是針對教師的數學觀念如何隨著時間進展而理解，這就是課程願景。願景與察覺的研究指出教師如何獲得學生對某數學概念思考有關的實務，其中一些教師連結所選擇的注意力，協助獲得學生策略的細節，最後產生對教學實務的感覺，使用其教室導出的知識為主的推理改變實務。

(二) 教師對課程資源的運用

Brown (2009) 認為教師對課程資源的運用能被理解當成設計的過程，然後遵循，那麼一些教師進行的教學設計會較一些教師有更多的調整。對於協助教師做教學的調整，他認為重點應優先置於教師與課程資源交互作用有關的因素上，像是教師對課程資源的本質與創造教材應具有的明顯特徵，有更深入的理解。Remillard 與 Bryans (2004) 觀察教師使用標準課程資源的運用，發現教師若能擴展教學架構、對學生的思考產生啟示，最佳化學生的學習，從課程的運用加以學習，那麼就能廣泛的調整作業，此結果指出教師的學習與教師從課程資源所導引的範圍有所關連。

Drake 與 Sherin (2009) 將專業願景擴展至教師課程資源的運用，認為教師若能熟悉學生參與課程資源的情形，那麼就有可能選擇課程資源與排列作業順序，提供有力的學習結果與更好的軌道理解。發展課程願景或教師設計能力，是所謂的調整學習的能力，此關係到教師從先前執行的行動所學習到，以知識為導向進行調整設計。調整學習包含理解課程資源如

何被用於特殊教學結果之設計教學，像是促進學生透過積極參與數學歷程而發展概念理解的機會。Choppin (2011) 探究 3 位教師如何應用、理解與連結其課程到學生的思考，發現教師之間的相似性包含如何建立目標、閱讀與遵循建議；3 位教師不同之處在於他們如何檢視作業以反應學生的思考，其中一位教師能與學生的思考做連結，並運用課程資源去設計「合宜的學習作業」，促進學生感覺的機會。研究亦發現教師能與課程願景形成伙伴關係，與學生的成就產生關連，因此 Choppin (2011) 建議使用課程願景在於理解資源如何連結，或支持學生數學思考的發展。教師對課程願景的理解，不僅是從閱讀資源教材，或參與專業發展所強調的課程特徵獲取，而且還從應用專業的願景，以教室中學生參與與課程願景的學習做系統化的探究。在課程運用的案例裡，獲得學生的思考與課程設計的理由，可提供教師「由他人產出之知識與理論」，思考當成知覺學生所做的事物。參與調整學習的教師可以編輯課程願景，促進教學實務的願景，超越遵循先前描述的課程。

Hiebert、Gallimore 與 Stigler (2002) 指出值得實務者教學與學習的知識，首先是能連結實務、反應實際特殊問題的知識，另一特徵是詳細的、具體的、明確的與統整的。專家教師能夠促進與執行課程進程，是透過課程資源與學生的交互作用，這些進程具 Olson 與 Ihrig (2010) 與 Hiebert 等人 (2002) 所描述的實務者知識之建設性的特徵，因此可協助理論化學習進程的本質。本研究旨在探索教師運用課程資源與執行周長和面積的教學，透過師生互動精鍊這些進程，然後伴隨課程資源的運用說明形成他們的專業發展工作，因此將這些進程描述為如 Choppin (2011) 之課程願景的 3 項要素：目標、軌道與課程資源的應用。雖然教師對發展課程的願景有其自我的歷程，但研究者發現小學教師會透過思考、研究運用：

1. 課程標準與分年細目能力指標，
2. 學生數學思考，
3. 數學教材有關的課程資源發展課程願景。

訪談教師關於課程計畫與做教學決策，發現他們也會討論如何發展與精鍊課程願景，描述課程資源運用的經驗，將注意力集中於問題與學生解題策略的理解、參與團隊與課程地圖的研習，這些資料皆能用來做為分析解釋課程資源的基礎。

二、周長與面積之學習軌道分析

根據教育部（2008）對國中小學數學領域能力指標的分析，國小數學課程在低年級階段強調幾何形體的認識、探索與操作，並能運用直尺等工具來繪製或仿製簡單的平面圖形，隨著幾何概念的學習，開始有「面積」的概念，能辨認、描述與分類簡單的平面圖形與立體形體。在中年級階段，學生開始結合「數」與「形」的概念，學習運用幾何形體的構成要素（如：角、邊、面）與其數量性質（如：角度、邊長、面積）來敘述幾何形體的性質或刻畫、區分幾何形體。學生能透過操作，將簡單圖形切割、重組成另一個已知的簡單圖形，並利用數量關係做簡單的推理，熟悉簡單的幾何圖形之面積公式（如：正方形、長方形）。到高年級時，開始由具體操作情境進入推理幾何情境，學習內容採用漸進式安排，由基本幾何概念進入較深入的幾何推理領域。此一階段的教材內容含有認識生活中的平面圖形（如：三角形、四邊形、多邊形、圓形、扇形）；理解幾何圖形的基本定義並熟練定義的相關操作（包括面積公式，如圓形、扇形、菱形）。

檢視學生周長與面積概念發展的研究文獻，Confrey 等人（2012）建議一周長與面積的 LTs，藉由 Confrey 等人對數學理解架構的引導，此 LTs 描述學生如何隨著時間朝向至一般化更聰慧的理解而精緻化周長與面積的概念。此 LTs 的內容包含：

1. 對物件的面積進行間接比較
2. 運用等分割方式創造測量的相同的單位，例如圖 1。
3. 將平面圖形透過 n 單位的方瓦進行沒有重疊與間隙的覆蓋，並說出其面積有 n 個方瓦單位，例如圖 2。

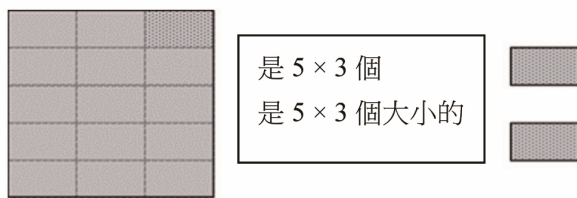


圖 1 利用等分割方式創造單位



圖 2 利用單位方瓦覆蓋瞭解面積大小

4. 明白邊長 1 單位的方瓦稱為「1 單位方瓦」，能說出面積為 1 方瓦單位，並運用他進行面積的測量。
5. 運用不同面積作為測量的單位，測量某物件的面積兩次，並描述這兩種測量的結果如何與選擇的單位大小做關聯。
6. 透過計數單位方瓦的方式測量面積（例如公分單位的方瓦或簡易單位）。
7. 運用整數的邊長透過方瓦的鋪蓋，發現長方形的面積，並顯示面積與邊長的乘積是一樣的發現。
8. 運用方瓦數目與邊長的關係，採用乘以邊長的方式，發現長方形的面積，解決真實與數學情境的問題，在數學推理時呈現整數的乘積當成長方形的面積。
9. 在具體的案例裡，以方瓦覆蓋顯示長方形邊長分別是 $b + c$ 與 a ，面積總與為 $a \times b$ 與 $a \times c$ ，並在數學推理時運用面積的模式呈現分配律，例如圖 3。
10. 明白面積具有加、減法性質，發現可藉由分解圖形成沒有重疊的長方形，加上部分的面積，可重新用方瓦覆蓋圖形面積此技術解決文字題（圖 4）。
11. 解決包含多邊形周長之數學的問題，包括發現給予邊長的周長、未知的邊長，並顯示等周長但不同面積、或等面積不同周長的長方形圖形，如圖 5。
12. 運用長方形面積與周長公式解決生活與數學的問題。
13. 運用面積的模式連結至周長與面積的問題，如圖 6。

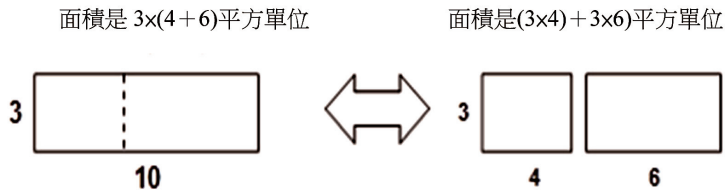
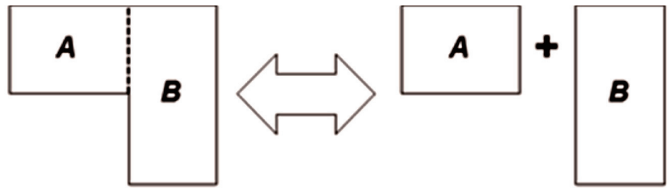
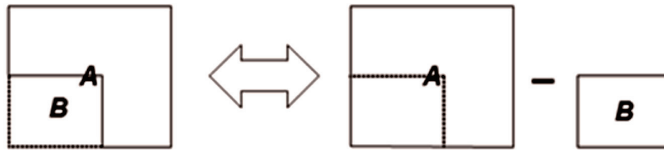


圖 3 利用圖形面積方式瞭解分配律

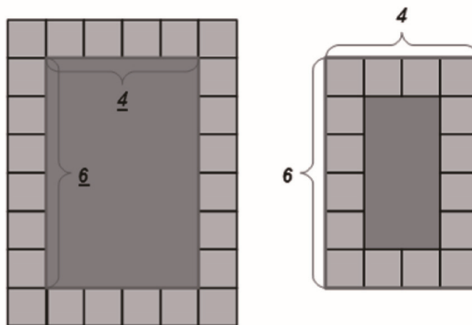


複合圖形的面積分解成長方形 A + 長方形 B



重疊圖形比較面積可分解成長方形 A - 長方形 B

圖 4 圖形面積具有加、減法性質



透過比對解題瞭解周長與面積的概念

圖 5 解決數學問題

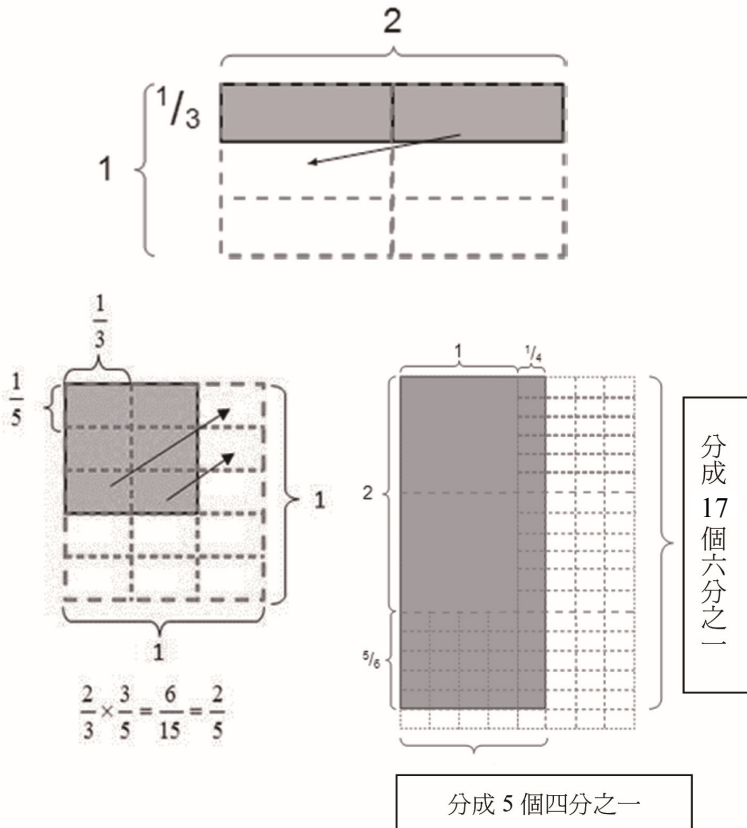


圖 6 運用面積的模式連結至周長與面積的問題

此 LTs 關聯的策略、實務與關係，可描述學生周長與面積概念理解的層次，並隨時間發展累積當成周長與面積的一般化進程。雖然整個 LTs 包含的概念非常廣泛，但可用敘事方式描述能力的層次，協助解釋研究的結果。除學生周長與面積之 LTs 的發展可提供教師課程資源的運用外，一些對學生學習產出的錯誤概念，例如圖形周長與面積概念的混淆、等周長的圖形面積皆相同、或等面積的圖形其周長亦相等、圖形改變形狀後其面積就會改變（吳婉儒、蔡鳳秋、楊德清，2005；陳嘉皇，2004；黃幸美，2010，2012；潘亭蓉、曹雅玲，2007；譚寧君，1994；Battista, M. T., Clements, Arnoff, Battista, K., & Burrow, 1998；Kamii & Kysh, 2006；Outhred &

Mitchelmore, 2004），亦可做為教師選擇、調整課程資源的材料。Ball（1990）與 Ma（1999）指出數學知識的不足持續存在於在職教師身上，指出應給教師在教室裡必要的數學知識。Hill、Rowan 與 Ball（2005）等堅持認為教師所需的數學知識不只是教學技巧而已，還需能促進他們解釋學生、分析學生的反應、運用合適的圖像以呈現概念，當教師具有此種數學知識的深度時，可正向預測學生的成就；若無法對數學深度的理解，那麼就無法實現聰慧的教學實務。

陳嘉皇（2004）發現教學現場常可見到教師教導周長與面積單元時，常以公式的宣稱為重點，然而數學概念的運作組合，並非符號的說明而已，而是關於另一種操弄順序的說明，也就是透過具體實物的操作，轉化至抽象概念的連結。例如，長方形周長以（長 + 寬） \times 2 的方式表達其關係，是種成人的乘法算則，學生要充分理解此概念，需要提供合適的教材內容與教學方法，才能啟迪其認知。由於長方形周長公式的宣稱，是將圖形中的兩個寬與兩個長，透過符號將之歸納成 $2a + 2b$ 表示，或進一步等同於 $(a + b) \times 2$ ，此歷程牽涉到：1. 長方形中長與寬的概念，2. 長方形周長的概念，3. 以符號代表長與寬，即符號與長、寬意義的連結，4. 透過符號呈現周長表列式。譚寧君（1994）在「國小中年級學童平面幾何圖形概念之探究」中發現有太多的例子顯示面積教學是失敗的，學生腦袋裡的面積概念是一連串的公式，至於面積公式所代表的意義，或不同面積公式之間的關連性等則被忽略，導致面積概念的偏頗而影響日後的學習。學生迷思概念的產生，一部分原因為教師在教學時忽略了具體操作，使學生無法透過「觀察」、「比較」、「測量」、「組裝」等行為來強化幾何圖形的概念，而只是記住了「幾何圖形」的印象，對於幾何圖形的組成要素、幾何性質、面積公式的由來仍舊缺乏完整性與系統性，導致其幾何概念不全或支離破碎，很容易產生迷思概念，影響日後幾何圖形的學習。

參、研究方法與步驟

- 本研究以教師運用與描述的 5 種行動：1. 周長與面積之教學目標、2. 周長與面積學習軌道臆測與數學概念分析，3. 周長與面積活動作業增

減行動，4. 周長與面積表徵之運用與 5. 學生周長與面積策略解釋等說明與決策範例，作為分析與討論教師學習 LTs 前後對課程資源運用的情形。

一、研究樣本

本研究的對象為服務臺灣中部某公立小學之 A 師，男性，擔任四年級之導師，主要教授的科目為國語與數學，學校位於都會區邊緣，家長職業以工、商為主，重視學生學業成就，課後會要求學生參與才藝學習，像是舞蹈、書法……學生多數參與課後補習。A 師大學主修語文教育，學習 LTs 理論前，採取大班級講述教學，之後則嘗試採用討論式方法，鼓勵學生小組或整班討論合作解題，要求學生將討論之解題思考與策略做記錄，然後讓學生到臺前發表、解說其解題思考。A 師服務年資 8 年，現就讀數學教育研究所，攻讀碩士學位，期間修習研究者開設的數學學習心理學、數學課程設計等課程。研究者選擇該位教師作為研究樣本，在於考量其曾接觸過「學習軌道」的理論，嘗試以學生的學習與思考作為教學重點，並瞭解學習軌道的精髓包含學習目標、作業設計與形成性評量，切合本研究重點；其次，A 師會透過省思，瞭解本身教學狀態，重視提升自我專業發展；再者 A 師學習 LTs 前後之教學方式迥異，可比較分析其學習 LTs 前後對課程資源運用的差異。為增進教師設計數學活動的教學力，研究者於其修讀研究所學位期間提供課程設計有效方法與策略如圖 7 所示，此方法與策略的演進包含三個階段，相關內容說明如下：

（一）作業閱讀階段

此階段包含三項活動策略：



圖 7 課程設計之方法及策略

1. 訂定單元教學目標：閱讀能力指標、應用課程資源、配合相關數學領域知能，與 LTs 理論，訂定學生學習目標。
2. 學習軌道臆測與概念分析：設計學習活動、組織學習順序，安排學生學習進程，培養學生由近程階段至遠程階段可連結知的能力與概念。
3. 數學術語與錯誤概念釐清：釐清數學問題結構意義與呈現物件表徵之間的關係，促進推想與臆測的進展。

(二) 作業調整階段

此階段包含兩項活動策略：

1. 活動歷程表徵運用：透過文字、圖像與表格各類表徵之判讀，尋找問題結構發展之規則，轉化成數學符號，掌握數學變項關係，呈現數學關係。
2. 解題策略評析：鼓勵多元策略運用，理解之間等價的關係，並運用解題。

(三) 作業改變階段

1. 課程調整與改變的重點

思索解題歷程採用之推理方式與解題策略，如何經由具體物件之視覺化，轉變至數學符號與表列式之形成，探索其間相關變數之掌握與運用，進而擴展應用至其他情境解題。

本研究分析之資料即為 A 師參與 LTs 學習前後，進行周長與面積課程設計與教學之相關資料。

二、課程資源

A 師使用之教科書版本為南一版，此單元內容包含「周長公式、長方形與正方形面積公式、平方公分與平方公尺的關係與換算、面積公式的應用、周長與面積」等重點，依循九年一貫課程綱要（教育部，2008）所要求的能力指標編擬，但設計的內容偏重於公式的介紹與運算應用，此版本之文本設計先提供範例問題，底下呈現解題策略與步驟，接著將相關的重點或宣稱以框框或黑體字加以強調，凸顯該作業或活動強調的數學概念，

最後呈現相關題目，提供學生應用練習。九年一貫課程有關「周長與面積」涉及的能力指標如表 1 所示：

由於乘法對加法的結合律是四年級學生數學代數領域重要的學習要點，可用以簡化問題，與周長與面積運算亦有關連，因此此版本亦將他納入做為練習的重點。除教科書與習作外，本研究指涉的課程資源尚包含九年一貫課程能力指標、教學指引、各式教具、教學方法與策略、作業與活動、學習單等廣義之內容。

三、資料蒐集

先將 A 師周長與面積單元的教學拍成影帶，總計 5 節課，然後一同觀察其教學進程，經過每節課之影帶觀察後，對 A 教師進行 60 分鐘的訪談，要求教師透過課室教學情節的回憶回答訪談之問題，A 師可依教學情節，配合課本、能力指標、學生作業與省思日誌，利用口語、動作、圖畫等表徵呈現對訪談問題的回應，研究者要求 A 師針對其對周長與面積教學的企圖目標加以說明與解釋，提供設計與想法之細節，並描述他對學生學習的狀況，詢問這些問題在於理解教師如何運用課程資源，並對學生的數學思考加以衡量，以下為訪談提出的問題：

1. 周長與面積這個單元要讓學生學習什麼數學目標？請你將相關的概念與能力列舉出來？
2. 要進行周長與面積此單元的教學，你認為該單元的教學順序該如何安排，請呈現學習軌道與其呼應的數學概念？
3. 進行該單元教學，你認為哪些作業活動該增加或刪減，以協助學生學習更加順暢？

表 1

周長與面積課程能力指標

能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。
能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。
能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。
能在具體情境中，理解乘法結合律。

4. 進行該單元教學，你認為可配合何種表徵，以協助學生學習重要的數學概念？
5. 你認為周長與面積的學習，學生會使用何種策略與思考？如何回應其解題的思考？

前 2 項問題的目的在於瞭解教師對課程內容與教學方法的認識，從中明白教師對於教學內容特徵的熟悉與掌握情形；後 3 項問題在於知曉教師對其學生認知發展與學習表現理解的程度。這些問題的回應除與 LTs 理論有關外，尚牽涉到教師應用到教學實務現場的學科內容知識與特殊教學內容知識，對理解與促進教師專業發展有重要的影響。除此之外，本研究另外目標亦想理解教師如何利用 LTs 進行教學，所以亦藉由「為何此作業適合學生學習？」、「下一階段你要教導什麼？」或「此活動完後下一階段你要教什麼？」等問題，探索教師如何進行教學決策。訪談歷程皆予以錄影，提供後續資料分析之用。

四、資料分析

本研究採質性研究的方式進行探討，分析的資料來自訪談教師蒐集之文稿與其省思日記，資料轉譯後，依據研究問題將其編碼分成 5 類，即 1. 周長與面積之教學目標，2. 周長與面積學習軌道臆測與數學概念分析，3. 周長與面積活動作業增減行動，4. 周長與面積表徵之運用，與 5. 學生周長與面積策略解釋。這些編碼除反應教師對周長與面積單元教學進程與內容結構，掌握教師對數學教育專業發展的理解外，並可協助研究者將焦點集中在教師談論其教學與學生學習進程有關課程資源運用的觀點，是否將重點放在本身的教學技巧、或集中於學生的數學思考與認知發展，以利研究者比較分析。

資料分析類型定義如下：

1. 周長與面積之教學目標：教導周長與面積單元學生可獲得之相關概念或能力，可從 4 年級數學領域能力指標、或教學指引中導出重點。
2. 周長與面積學習軌道臆測與數學概念分析：包含周長與面積單元教導之數學概念順序，類似於學習軌道設計之作業活動所組織與排序的數學活動，描述學生需學習特殊的目標與意義。

3. 周長與面積活動作業作增減行動：即教學執行期間，為讓學生順暢其學習或連貫統整概念與技巧，對作業或活動增減之行動。
4. 表徵運用：指利用圖形、圖像、表格、文字、動作或符號等協助學生理解周長與面積等相關數學概念。
5. 周長與面積策略解釋：學生對周長與面積作業呈現之解題方法與策略思考的範圍，這些方法與策略是有效或正確、達成目標必要的步驟等。

因質性研究容易受到情境之獨特性、內容的複雜性與研究者的人格特質等因素影響，因此有關研究者的身分立場、選擇研究對象的經過、設計方法與資料分析與處理的方式等加以說明，以提高研究的可信度（credibility）。關於「教學觀察與攝影紀錄」，則邀請共同研究者參與「師生互動表現」之資料分析、確認，以提高研究之可信度。資料的分析以三角校正法（triangulation）檢驗，方式包含：來源、方法與分析者，資料分析過程中，為避免研究者主觀偏見，與專家、學校同事進行討論，以取得研究結果之效度。

肆、研究結果與討論

有關 A 師如何應用課程資源於周長與面積單元的教學比較分析，茲以：一、周長與面積之教學目標，二、學習軌道臆測與數學概念分析，三、活動作業作增減行動，四、表徵運用，與五、學生策略解釋等層面之進展加以說明。

一、周長與面積之教學目標

針對「學生學習周長與面積後可學到何種概念與能力？」學習 LTs 前，A 師拿出書商提供之「教學指引」，將學生學習後可達成的目標記錄下來，學習 LTs 後，A 師不僅拿出「教學指引」，還與「九年一貫數學能力指標」對照比較，寫下學生學習此單元後應獲得的目標，如表 2 所示。

表 2

A 師於學習 LTs 前後設定之周長與面積學習目標一覽表

學習 LTs 前	學習 LTs 後
能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算	能用併式記錄加減兩步驟的問題
能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式	能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作
能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形	能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算
在具體情境中，理解乘法結合律	能認識周長，並實測周長
	能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算
	能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算
	能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式
	能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形
	能在具體情境中，理解乘法結合律

A 師學習 LTs 前、後對學生「周長與面積」設定的目標顯然不同，學習 LTs 前，A 師採用的課程資源主要以教科書與教學指引為主，並未深入理解教科書數學的內涵與周長與面積教材的特質，憑藉自己以往學習的經驗教導學生，偏重計算程序的傳授，強調周長與面積公式計算之熟練，並未符合教科書所預定達成的目標（圖 8 之學習軌道的臆測），經 LTs 學習後，A 師做了以下的回應：

學生雖然會使用公式解題，但常會將周長和面積的公式誤用，我覺得周長和面積的問題很簡單，學生應該聽得懂我說的。經過研究所上課後，我發現問題出在我自己本身，我想得太簡單了，很多重點忽略掉了，我相應該這樣做：

1. 把題目的解答刪除，並分列兩種做法。⇨讓學生自己思考，並將做法記下。
2. 先介紹長方形的長和寬 ⇨因為讓學生理解長方形公式之前，需先認識圖形長和寬。



圖 8 A 師學習 LTs 前所描繪之「周長與面積」學習軌道

3. 增加題目做比較： $長 \times 寬 = 寬 \times 長$ \Rightarrow 加強理解面積計算
4. 增加平方公尺量感的認識題目 = 加深體會量感
5. 多幾題平方公尺的練習題 \Rightarrow 認識面積單位平方公尺
6. 增加 1 平方公尺 = 10000 平方公分的繪圖 \Rightarrow 讓學生對面積單位換算更熟悉
7. 將複合圖形的題目以題組方式做設計 \Rightarrow 逐步引導學生作答

經過 LTs 的學習後，A 師對於課程資源的應用由原先以自我學習經驗作為引導教學的基礎，強調計算能力的練習，轉變成以考量學生學習為主要的任務，除擴展課程資源的材料外，並深入探索「周長與面積」單元的重點，將學生學習目標的設定納入先前在三年級必要的的能力與概念，像是長方形圖形的幾何特徵、相關要素的辨識，並解析學習「周長與面積」所需之概念與能力，例如經實測瞭解周長與面積的概念、多元解題策略的誘發、與學習最後應具備的目標為何？並將所需的目標依照學生認知的進展加以排序，系統與連慣性的呈現數學知識。

從 A 師的行動說明可理解其具有 Drake 與 Sherin (2009) 描述的課程願景發展能力。課程願景是對運用的課程材料所蘊含的數學與教學目標的理解，亦即理解何種課程材料企圖協助學生完成，且這些活動、課程內容如何適合學生去完成這些目標。A 師展現課程願景的能力除受到學習 LTs 理論影響外，另因班級實務的需求促使其進行改變，目標設定的重點從教師轉變到學生身上，課程願景的發展反映了「要教什麼」的重點轉變到「要學習什麼」上，這些課程策略的改變，說明 A 師運用課程材料，先發展能力指標所描述的教學願景，再從教材的特質轉變至學生的學習考

量。針對清楚分析課程目標此行動，研究者建議教師應先閱讀、評估課程材料可提供增加課程願景的證據，經由閱讀轉變至目的的決策可讓教師明白：1. 課程材料包含長期的數學願景，可讓他們針對教學活動廣泛瀏覽課程而深入理解此願景，2. 理解課程願景裡的目標如何配合學生的認知發展與教材的特性是非常重要的，因為教師設定的教學目標會影響隨後教學軌道臆測與作業活動增減的行為，直接影響學生學業成就的表現。

二、周長與面積學習軌道臆測與數學概念分析

對於「教學順序與活動如何安排？」與「活動內容需包含哪些數學概念？」相關問題？學習 LTs 前，A 師拿出教科書參照「周長與面積」該單元各頁面上的標題，按順序逐次繪製出此單元的學習軌道（圖 8），他認為教科書的作業活動內容皆依課程綱要能力指標編製，只要按照課程編排的順序教學，學生應可獲得本單元應有的概念，只是教學時應特別注意學生計算的問題，因為公式對於學生解周長與面積的問題非常重要，因此要多強調計算練習。經學習 LTs 後，A 師發現採用的教科書雖具備明確指出能力指標與教學特徵的目標，但強調課程內容的設計不一定與能力指標符合，考量應讓學生多加思考，為讓學生充分學會周長與面積，他提出學習軌道如圖 9 所示。

將圖 8 與圖 9 臆測之學習軌道加以比較：A 師在學習 LTs 前，其教學的重點在於培養學生計算能力，強調周長與面積公式的應用，因此臆測的學習軌道環繞著「計算」議題；學習 LTs 後，他修正並調整補充許多的航點，包含測量、理解幾何圖形要素、探討周長與面積公式有關要素之間的關係，除強調學習該單元教材強調的重點外，還將呈現能力指標有關的行動如測量、理解與應用予以釐清，並適切的與欲培養之數學概念與能力配對，以能確切進行教學並達成教學目標。為何對臆測的學習軌道加以改變，A 師寫下以下的理由。

運用課程理解來支援學生理解（提問）；討論式教學；足夠的材料；運用（善用）經驗來改進課程內容；同儕對話、重新思考；改變深度，不再是教科書所給的幅度；不是只給正確答案，而是詢問（所有）學生為何這樣理解，請解釋。

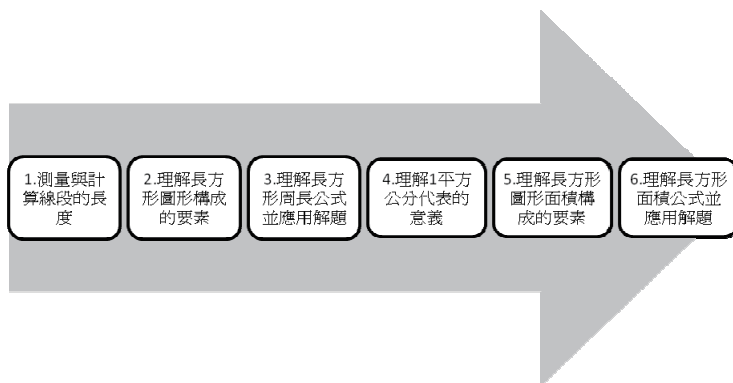


圖 9 A 師學習 LTs 後所描繪之「周長與面積」學習軌道

針對上述內容可歸納出 A 師改變學習軌道的幾項要點：1. 理解 LTs 的要點，即數學教學應以理解學生的數學理解做為重點，因此需用提問的方式激發學生思考，並以討論式教學進行學生概念的溝通與交流；2. 善用課程資源，結合身邊可用之教材或教具，提供學生學習更適宜的內容與進程；3. 轉化教學經驗與信念，包含改變教學方法、提供學生學習機會，最重要的是從專業發展過程肯定自己可以提供學生良好學習的材料與環境，提升學生學習動機與成效。A 師對於課程資源應用於學習軌道的臆測，符應 Choppin (2011) 建議使用課程資源在於理解資源如何連結，支持學生數學思考的發展，因此可以選擇課程資源與排列作業順序，提供有力的學習結果與更好的軌道理解。

三、活動作業增減的行動

LTs 學習前，A 師自述其教學的內容皆按照課本的題目與編排方式「照本宣科」，並強調計算與解題，依照自己認為「重要的」與考試「會考的」，不斷練習並要求學生學會，甚少從學生對數學學習與理解的角度考量。學習 LTs 後，A 師對課本進行批判，他寫下以下的內容。

優點：（1）課程介紹流暢。

（2）考量當年段學生程度配合課綱。

缺點：（1）多為紙上談兵，少配合生活實際與操作（例如：利用釘板來認識幾何）。

（2）提醒學生的「小標重點」太多。

A 師認為課本配合能力指標提供學生學習的要點，但在周長與面積的單元內容缺乏操作與討論的機會，以致學生無法從做中學與相互討論的過程理解周長與面積的概念，甚至課本內容太強調計算練習，無法啟發學生思考，且學生所學的概念太瑣碎，並非是統整與連貫的知識，因此需加以調整與補充。對於周長與面積此單元如何做調整，A 師呈現以下的重點：

1. 單純的刪掉問題後的解答
2. 調整從周長至面積的教學順序
3. 增加長方形、正方形圖形計算面積，並分成兩種做法。讓學生比較長 \times 寬與寬 \times 長求出面積是否相同，進一步引導思考。
4. 增加量感題目例如，動手做看看，學校的長方形籃球場需要幾塊 1 平方公尺的帆布才可以覆蓋。
5. 增加圖形求面積以與應用問題求面積。（邊長的單位為公尺）
6. 教科書增加一平方公尺分割成一萬個一立方公分的圖形。
7. 題組例如，這個題目是由兩個圖形組成的，請問 (1) 紅色的是什麼圖形？(2) 藍色的是什麼圖形？(3) 紅色圖形的面積是多少？(4) 藍色圖形的面積是多少？(5) 合起來的總面積是多少？

A 師認為課本內容的編排對於問題呈現後，與呈現解題的策略與答案，嚴重限制學生的思考與學習數學的樂趣，因此建議應該將解答的部分予以刪除，提供學生思考的空間，另外他依照學習軌道的進程，重新設計與補充有關測量與計算、理解圖形要素與理解面積公式與應用解題等作業活動，其設計與補充的作業如圖 10、11 與圖 12 所示。

A 師補充設計的作業具有下列幾項重點：1. 透過測量與操作，將學生長方形圖形構成的要素與可逆計算的能力結合，透過視覺化之辨識與先前學過之併式計算能力解決邊長未知的問題（圖 10）；2. 透過提供操作機會深化對長方形構成要素的理解，釐清周長與面積的概念（圖 11）；3. 提供啟發式解題的問題設計，透過步驟之引導，提供學生多元解題策略之思考與應用（圖 12）。A 師期待透過這些補充的作業活動，學生能在較連貫與統整的周長與面積學習軌道，學習並應用知識。A 師運用課程資源做活動的增減行動，具 Olson 與 Ihrig（2010）與 Hiebert 等人（2002）

所描述的實務者知識之建設性的特徵，因此可協助理解與理論化學習進程的本質。且 A 師經由設計課程特徵之重點，強化其解釋周長與面積教學事件的能力。

四、表徵運用

A 師除了針對周長與面積教材的特徵，呈現相關的圖形與算式外，還運用線段圖與扣條等教具，提供學生思考與操作、動作表徵的機會，設計的作業內容，如圖 13 所示。

一、測量與計算線段的長度

1. 觀察以下的線段並回答問題



- (1) 這 1 條線段是由 () 條一樣長的黑色線段和 () 條一樣長的白色線段組成。
- (2) 每 1 條黑色線段是 5 公分，每 1 條白色線段是 3 公分，那麼這整條線段長 () 公分？
- (3) 你是怎麼算的？說說你的想法！

2. 觀察以下的線段並回答問題



- (1) 這 1 條線段是由 () 條一樣長的白色線段和 () 條一樣長的黑色線段組成。
- (2) 每 1 條白色線段是 5 公分，每 1 條黑色線段是 8 公分，那麼這一整條線段長 () 公分？
- (3) 你是怎麼算的？說說你的想法！

3. 觀察以下的線段並回答問題



- (1) 這 1 條線段是由 2 條一樣長的黑色線段和 1 條白色線段組成。
- (2) 每 1 條黑色線段是 10 公分，線段全長是 25 公分，那麼白色線段長 () 公分？
- (3) 你是怎麼算的？說說你的想法！

4. 觀察以下的線段並回答問題

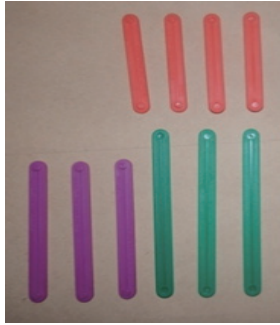


- (1) 這 1 條線段是由 2 條一樣長的黑色線段和 2 條白色線段組成。
- (2) 每 1 條黑色線段是 8 公分，線段全長是 40 公分，那麼白色線段長 () 公分？
- (3) 你是怎麼算的？說說你的想法！

圖 10 A 師設計與補充之測量和計算的作業活動

二、理解長方形圖形構成要素

1. 桌上總共有 10 條塑膠條（如下圖），要把他組成長方形，可以組成幾種長方形？



二、理解長方形圖形構成要素



二、理解長方形圖形構成要素

1. 看看組好的長方形圖形回答下列問題

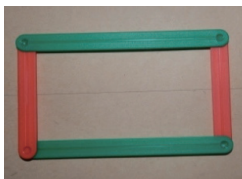


圖 1



圖 2

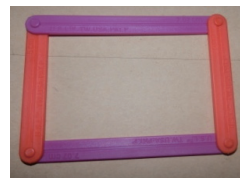


圖 3

- (1) 圖 1 這個長方形的周長是由 () 條一樣長的 () 色的塑膠條和 () 條一樣長的 () 色的塑膠條組合而成
- (2) 圖 2 這個長方形的周長是由 () 條一樣長的 () 色的塑膠條和 () 條一樣長的 () 色的塑膠條組合而成
- (3) 圖 3 這個長方形的周長是由 () 條一樣長的 () 色的塑膠條和 () 條一樣長的 () 色的塑膠條組合而成

五、理解長方形圖形面積構成要素

1. 圖 1 是由 5 個方格組成，他的面積是 (5) 平方公分，量量看他的長是 () 公分，寬是 () 公分，表示長可以切割成像 1 平方公分方格大小的方格 () 個，寬代表 1 列，可以用 $5 \times 1 = 5$ 計算，得到 5 個方格，所以面積是 5 平方公分。



2. 圖 2 是由 () 個方格組成，他的面積是 () 平方公分，量量看他的長是 () 公分，寬是 () 公分，表示長可以切割成相 1 平方公分方格大小的方格 () 個，寬代表 () 列。

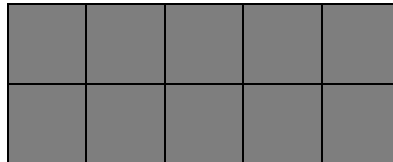
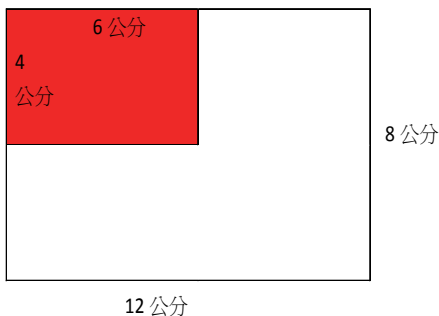


圖 11 A 師設計與補充之理解圖形要素的作業活動

六、理解長方形面積公式並應用解題

3. 陳老師玩拼圖遊戲，用 1 平方公分的方格要將白色的紙完全覆蓋，紅色部分是已經覆蓋完的，白色部分還再進行：



- (1) 白色紙張剩下部分的面積是多少？想想看要怎麼做？
- (2) 白色紙張長邊是 () 公分，可切成 () 個方格，寬是 () 公分，可切成 () 列，這個長方形白紙部分總共需要 () 個方格才能覆蓋完全，他的面積是 () 平方公分。
- (3) 紅色長方形覆蓋部分的長邊是 () 公分，可切成 () 個方格，寬是 () 公分，可切成 () 列，這個長方形紅色部分已經用了 () 個紅色方格覆蓋，他的面積是 () 平方公分。
- (4) 剩下白色部分要用 () 個紅色的方格才能完全覆蓋，他的面積是 () 平方公分。
- (5) 還有沒有其他解題的方法。

圖 12 A 師設計與補充之理解面積公式和應用解題的作業活動

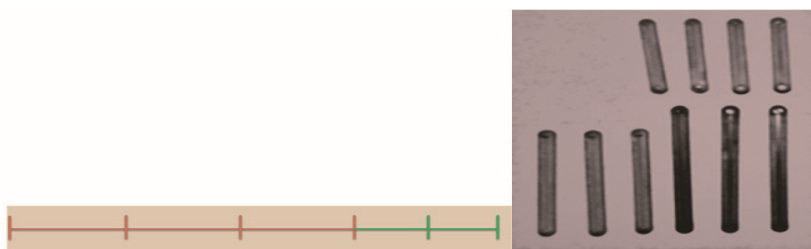


圖 13 A 師運用線段圖與塑膠扣條呈現圖形表徵

A 師運用線段圖表徵，除提供學生視覺化解題的線索外，他認為還可以引發學生多元解題的策略，包含加法、減法與分配律與結合律的應用，使學生解題方法的應用更具彈性；扣條的操作則可促進學生對幾何圖形特徵的辨識，並從組合的歷程透過動作表徵理解圖形要素與其間的關係，例如長方形是由兩個長加上兩個寬構成，正方形則為四個邊等長的封閉圖形等。從學生操弄教具的動作表徵與說明，A 師發現學生對於長方形結構錯誤的概念可透過此動作表徵加以釐清，例如學生將扣條採取「長邊 + 長邊 + 短邊 + 短邊」的方式組合，但無法拼成長方形圖形，俟以「長邊 + 短邊 + 長邊 + 短邊」方式組合後才能拼成長方形，隨後透過視覺化理解到長方形周長中文表記式（長 + 寬） \times 2 的意義。使用這些具體物提供學生操作，A 師認為具有以下的作用：

用扣條將四周圍起來的線段 -> 周界，它的長度
-> 周長。

長方形：兩邊長度等長、寬度等寬所圍成之
圖形。例如：

$$\begin{aligned} \text{周長} &= (28 + 28) + (15 + 15) \\ &= 28 \times 2 + 15 \times 2 = \text{長} \times 2 + \text{寬} \times 2 \\ &= (\text{長} + \text{寬}) \times 2 = (28 + 15) \times 2 = 86 \text{ 公尺 (m)} \end{aligned}$$

正方形：四邊等長所圍成之圖形。（正方形也是有兩個長兩個寬，只是長 = 寬，故四邊等長。）

$$\text{周長} = 12 \times 4 = \text{邊長} \times 4 = 48 \text{ 公分 (cm)}$$

在圖形表徵運用方面，除觀察課本內容之圖示外，A 師亦提供色紙讓學生用尺進行測量，再運用量好的公分大小進行覆蓋以測量出圖形面積大小，並以摺紙方式呈現正方形與長方形圖形面積的關係（圖 14），例如：

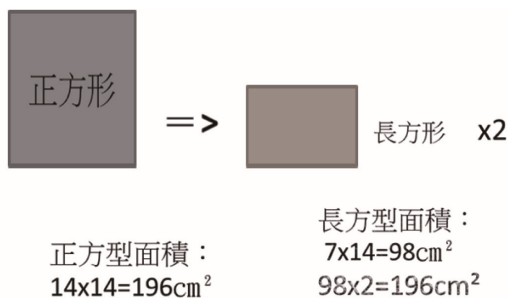


圖 14 利用色紙呈現正方形與長方形圖形面積的關係

A 師對於表徵的選擇與應用呈現出 Drake 與 Sherin (2009) 與 Remillard 與 Bryans (2004) 主張相似之處，即 A 師明白運用課程資源表徵的改變可以當成執行教材的結果，特別是 A 師的數學觀念隨著教學進展而理解到如何獲得學生對某數學概念思考有關的實務，連結所選擇的表徵以協助獲得學生解題的策略，這可產生對教學實務的感覺，使用教室導出的知識為主的推理改變實務。

五、學生策略解釋

針對周長與面積單元解題策略之解釋，學習 LTs 前，A 師以課本提供之解題策略做為範本，提供學生解題之參考，說明解題步驟與涉及的結構關係意義；俟學習 LTs 後，A 師學習到可在單元活動教學前先行預測學生對於設計問題可能產出的解答方式或策略為何，盡量描述。例如測量與計算線段的長度時，A 師會針對設計問題的特質，臆測學生可能會採用連續加法、兩步驟加法、兩步驟乘法再加總、結合律等方式解題。這些臆測到的解答方式或策略（圖 15、16），一方面反應班級學生認知層次發展以及必須學習的目標能力與概念，可提供作為班級學生討論教學選擇與排序的議題；另一方面透過學生學習策略的臆測，可作為檢測學生在學習軌道的位置，此形成性評量方式可針對學生的表現適時的調整課程內容或強化

作業，協助學生順利達成學習目標；再者學生透過呈現的多元解題策略解釋（例如加法、乘法、併式計算、結合律或中文表記式等），彼此討論溝通，可培養其推理思考與彈性解題的能力，增進對數學學習的興趣。

從課程願景發展的角度加以評析 A 師的行動，學習 LTs 後，A 師以教室中學生參與與課程資源的學習做系統化的探究，在周長與面積單元課程運用的案例裡，他從臆測的解題策略獲得學生的思考與課程設計的理由，提供了「由他人產出之知識與理論」，思考當成知覺學生所做的事物，促進教學實務的願景，超越遵循先前描述的課程。

針對 A 師學習 LTs 前後對於周長與面積單元課程資源有關周長與面積之教學目標、學習軌道臆測與數學概念分析、活動作業作增減行動、表徵運用與學生策略解釋等層面之表現加以分析後，可以肯定 A 師能有效的運用周長與面積單元相關的課程資源，而此課程資源運用之進程，可從解碼、釐清、處理、設計、執行等機制加以發展，其關係如圖 17 所示：

如 Hiebert、Gallimore 與 Stigler（2002）指出值得實務者教學與學習的知識，首先是能連結實務、反應實際特殊問題的知識，另一特徵是詳細的、具體的、明確的與統整的。因此要激發教師運用課程資源，在起始點可提供「解碼」的機制，引發其需運用課程資源的動機。此機制包含其教學歷程所欲困難之相關課程內容、教科書的情境、與教師教學經驗衝突之事項、學生學習議題產生之認知困境，例如為何學生對於周長與面積的

一、測量與計算線段的長度

- S1：全部加起來 $5 + 5 + 5 + 3 + 3 = 21$
- S2： $5 + 5 + 5 = 15$ $3 + 3 = 6$ $15 + 6 = 21$
- S3： $5 \times 3 = 15$ ， $3 \times 2 = 6$ ， $15 + 6 = 21$
- S4： $5 \times 3 + 3 \times 2 = 21$

一、測量與計算線段的長度

- S1：全部長度剪去藍色的線段長度 $25 - 10 - 10 = 5$
- S2： $10 + 10 = 20$ $25 - 20 = 5$
- S3： $10 \times 2 = 20$ ， $25 - 20 = 5$
- S4： $25 - 10 \times 2 = 5$

圖 15 教師臆測學生測量與計算線段長度的解題策略

二、理解長方形圖形構成要素

- 3. 說說看你組成這些長方形是怎麼想的？
- S1：2 條一樣長的綠色塑膠條和 2 條一樣長的橘色塑膠條組成
(長 + 長 + 寬 + 寬)
- S2：長方形相對的邊要一樣長
- S3：長方形圖形的周長是由 2 組等長的塑膠條組成 (長 + 寬) ※ 2
- S4：長方形圖形的周長可以由 (長※2 + 寬 ※ 2) 組成

五、理解長方形圖形面積構成要素

- S1：5 + 5 + 5 = 15
- S2：長邊可以切割的方格數乘以有幾列 (寬)
- S3：寬可以切割的方格數乘以有幾行 (長)
- S4：長有幾公分表示可以切成幾個方格，再乘以寬可以得到幾列
- S5：長 (切成的格數) ※ 寬 (可切幾列)

圖 16 A 師臆測學生理解長方形要素的解釋策略

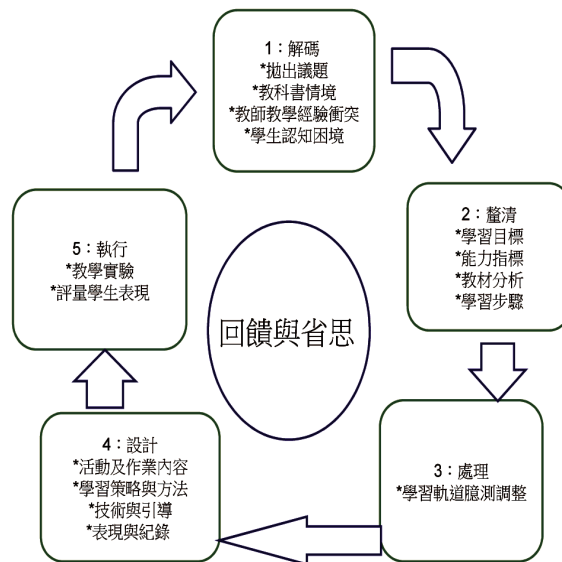


圖 17 A 師運用課程資源之進展機制

概念總是混淆？為何學生如法理解等積異形的概念？這些現象皆與教師教學實務有關，具急迫性與重要性，須教師思考如何解決，因此可協助相關的課程資源，引導與協助教師進行問題之釐清與解決；在「釐清」與「處理」，類似於 Drake 與 Sherin (2009) 的主張，教師發展課程願景時，在教學的前、中、後期會進行閱讀、評量與調整課程等策略。教師課程資源的運用可針對數學單元目標、能力指標、教科書與教學指引的分析與學生學習步驟與教材編排等加以「釐清」，以瞭解學習數學單元的目標、教材特質與學生概念發展之間的關係。再者，針對選擇的課程資源與作業的順序加以「處理」，提供有力的學習結果與更好的軌道解釋。「設計」的機制，則是教師運用課程資源去設計「合宜的學習作業」，促進學生學習的機會，這些合宜的學習作業設計包含了活動與作業內容、學習的策略與方法、作業操作技術的說明與引導程序、學生學習表現如何記錄與分享；最後教師將調整後的課程資源進行教學實驗，以瞭解教材設計與學生學習成效之間的關係，當教師「執行」課程資源時，配合回饋與省思會發展一種藉由教材提供學習機會的理解。透過此模式的進展，教師可以組織學科內容並描述學生朝向更聰慧知識的有力途徑，明確的區分學生建構一種統整知識架構所需概念之間的連結，連結內容至學生可以解釋之合適的現象或模式，提供有效的教學策略與學習作業以協助學生從低層次轉移至高層次的認知發展。

伍、結論與建議

本研究旨探索國小教師利用 LTs 當成教學的工具，比較其學習 LTs 前後對課程資源的運用情形？研究問題包含教師針對數學「周長與面積」單元議題有關教學目標的設定？對學生「周長與面積」LTs 的臆測與數學概念分析為何？對學習的活動作業，做何種調整的行動？運用何種表徵協助學生學習？如何對教科書提供學生數學解題的策略進行解釋？歸納研究結果可獲致以下結論：

- 一、教師於 LTs 學習前之目標設定強調以計算能力培養之課程內容取向，學習 LTs 後則以實測與圖形要素關係理解之學生思考作為導向。

- 二、教師學習 LTs 前對學生學習軌道之臆測以長方形周長與面積公式之計算應用為主，學習 LTs 後之學習軌道路徑為 1. 測量與計算線段的長度 → 2. 理解長方形圖形構成的要素 → 3. 理解長方形周長公式並應用解題 → 4. 理解 1 平方公分代表的意義 → 5. 理解長方形圖形面積構成的要素 → 6. 理解長方形面積公式並應用解題。
- 三、教師補充測量與操作作業，將學生長方形圖形構成的要素與可逆計算的能力結合，透過視覺化之辨識與先前學過之併式計算能力深化對長方形構成要素的理解，釐清周長與面積的概念，提供啟發式解題的問題設計，透過步驟之引導，提供學生多元解題策略之思考與應用。
- 四、教師運用線段圖與扣條等教具，提供學生表徵運用進行思考與操作、動作表現的機會。
- 五、教師在單元活動教學前先行預測學生對問題可能產出的解答方式或策略，一方面反應學生認知目標發展的能力與概念，另一方面透過學習策略的臆測，作為檢測學生在學習軌道的位置，協助順利達成學習目標。

本研究對於教師「如何」進行課程資源運用，與教師進行的課程資源運用內容是「什麼」，提供明確、成功的範例。本研究樣本利用學習軌道理論與其內容，配合身邊之教科書、教學指引、數學能力指標、教具與學生解題策略等素材，進行學生學習目標、教學活動編排與路徑選擇、作業補充修正、表徵運用與學生解題思考之解釋說明，呈現教師完成課程願景的能力，提供學生統整與持續不斷學習的機會以發展周長與面積概念的理解，展現課程標準所欲達成的目標。從課程資源運用的歷程，教師透過引導「邁向課程資源運用的方向」，展現出教學設計能力，證實是種有效的教師專業發展活動，可在教師社群予以推廣應用。另本研究從觀察與省思教師閱讀、調整與改變課程資源的歷程相關資料，獲得促進教師運用課程資源之進展機制，包含解碼、釐清、處理、設計、執行等循環步驟，提供教師如何運用課程資源改變實務的步驟與策略，此模式可讓教師將教學的焦點集中在大的數學觀念或課程目標，積極的思考學生用來達成這些目標的策略，並能針對支持學生達成這些目標運用、調整或創造課程材料的策略。為有效對課程資源的整合，連結師生互動、課程資源內外之間的條件，

提供學生良好學習環境，根據研究發現提出以下建議，做為未來教師專業發展考量之重點。

- 一、可利用學生對教科書內容產生之困難或學習不佳處，作為解碼起點，經由對數學能力指標之分析、數學教材本質的探討、學生解題策略之思考，引導教師精進教學。
- 二、在釐清與處理階段，為強化周長與面積數學概念教學，教師需掌握物件單維度與二維度相關測量的知識，例如單位量之產出、測量迭代的技術、解題策略的引出，透過活動與表徵的轉換，協助學生瞭解其公式之意涵，並應用解題。
- 三、在設計與執行方面，透過對教學單元教材之分析，建構學習活動路徑的安排，融入學生正確與迷失概念的任務設計，從學生操作、思考、記錄與發表的歷程，不斷省思教學目標是否達成？如何達成？等相關議題。

教師運用本研究建構的課程資源進展機制是種包含知、行、思等教師專業發展的要素，也提供教師發展數學內容與教學知識的策略與方法，此模式建構教師課程運用實務歷程之間關係的檢視、學生思考的模式與教師提供的知識，當教師經由省思組合成其自己的教學內容與學生的知識時，此知識的重構與精緻化，實踐「教學相長」的理念。

Summary

A STUDY ON HOW AN ELEMENTARY SCHOOL TEACHER USES CURRICULUM MATERIALS TO TEACH PERIMETER AND AREA

INTRODUCTION

In recent years, researchers in the field of mathematics education have been exploring the structures of learning trajectories or learning progress to assess and improve existing LP and innovate new courses based on their theories (Chen, 2013; Clements & Sarama, 2004; Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012). In addition to helping teachers focus on student learning, LTs also facilitate curriculum design and teaching practices and clarify theories relevant to the learning of mathematics. However, in terms of the use of course resources in mathematics, the majority of past studies were centered on the inspiration that students gain from thinking and understanding rather than on the means by which teachers understand, use, and introduce LTs in their teaching or course resources (Sztajn et al., 2012). When learning about area and perimeter, students often confuse the two concepts; they have difficulty understanding the concept of conservation, such as different shapes having the same area, and misuse the area and perimeter formulas because they do not understand their origins. To overcome these issues, teachers need an effective mechanism to assist themselves in making good use of teaching resources, providing effective learning strategies, and assessing the LP of their students. With regard to this issue, this study applied the learning trajectory theory proposed by Clements and Sarama (2004) and the LT designed by Confrey et al., (2012) for area and perimeter to the professional development of teachers and investigated how teachers employ LTs, use resources for courses on area and perimeter, and connect teaching materials to the interpretation of their students' mathematical thinking so as to improve their teaching practices and enhance the mathematical achievements of their students.

METHODOLOGY

This study analyzed five actions to investigate how teachers utilize course resources before and after learning to use LTs: 1. the establishment of the teaching objectives of the area and perimeter unit, 2. the conjecture of LTs for the unit and the analysis of its mathematical concepts, 3. the increase or decrease in unit activities and assignments, 4. the use of area and perimeter representation, and 5. the problem-solving strategies of the students. The research subject was a male teacher serving as the homeroom teacher of a fourth grade class at an elementary school in Central Taiwan, whom I will refer to as Teacher A. The primary subjects that Teacher A taught included Mandarin Chinese and mathematics. I chose Teacher A as the subject of this study for three reasons. First, he had encountered the theory of LTs before and attempted to focus on student learning and thinking in his teaching. He understood that LTs include learning objectives, assignment design, and formative assessments, which fit the focus of this study. Next, Teacher A habitually reflects on his teaching and values his own professional development. Lastly, his teaching methods before and after learning to use LTs differed considerably, which made the analysis of the differences in course resource usage more easily. By using a qualitative approach, I analyzed my interviews with Teacher A and his reflective journal to translate them and then encode the data according to the responses to the research questions. The coding showed how Teacher A established the teaching progress and content structure of the area and perimeter unit and how he pursued his professional development objectives in teaching mathematics. In addition, it assisted us in gaining his perspective in teaching and utilizing course resources associated with the LP of the students and determining whether his focus centered on his own teaching skills or on the mathematical thinking and cognitive development of this students.

RESULTS

The research subject, Teacher A, used the theory of LTs in conjunction with the textbook, teaching guidelines, mathematical ability indices, teaching aids, and student problem-solving strategies to establish student learning objectives and the schedule and content of activities, revise supplementary assignments, use representation, and explain the problem-solving strategies of

this students. This process showed his ability in achieving course goals and visions and provided his students with the opportunity to integrate and learn continuously so as to develop their understanding of the concepts of area and perimeter. In the process of utilizing course resources, Teacher A set up a general direction for course resource usage, which demonstrated his capacity in course design and proved that effective professional development activities should be promoted in teacher communities. After analyzing Teacher A's process in reading, adjusting, and modifying course resources, we derived the mechanism to facilitate the usage of course resources, which is a cycling process of encoding, clarifying, processing, designing, and executing. This model can assist teachers in changing the way they use course resources in practice so that they can focus their teaching on major mathematical concepts or course objectives, contemplate the strategies that students can use to achieve these objectives, and adopt, adjust, or innovate course materials to support these strategies. With the effective integration of course resources and linking them to teacher-student interactions, teachers will therefore be able to provide students with a better learning environment.

CONCLUSIONS AND SUGGESTIONS

After analyzing our results, we arrived at the following conclusions.

1. Before Teacher A learned to use LTs, his goals were aimed at enhancing calculation skills; after learning to use LTs, his goals turned to gauging and furthering student understanding on the relationships among graphic elements.
2. Before learning to use LTs, Teacher A conjectured that the LT of his students mainly comprised the computing applications of the area and perimeter formulas for rectangles; after learning to use LTs, the LT was therefore modified to the following procedure: 1. measuring and calculating the length of line segments; 2. understanding the constituting elements of rectangles; 3. understanding the perimeter formula for rectangles and using it to solve problems; 4. understanding the meaning of a square centimeter; 5. understanding the constituting elements of the area of a rectangle; 6. understanding the area formula for rectangles and using it to solve problems.

3. The supplementary measurement and operation assignments designed by Teacher A enabled students to merge the constituting elements of rectangles with their capacity in reversible calculation. Through visualization and their existing capacity in merging calculation, the students can deepen their understanding of the constituting elements of rectangles and clarify the concepts of area and perimeter. The assignments also contained heuristic problem designs that guided the students in problem solving and promoted diverse thinking.
4. Teacher A used line segments pictures and buckles as representation to promote student thinking.
5. Prior to unit activities, Teacher A predicted the possible methods or strategies that students would use in problem solving. For one thing, this reflected how students work toward cognitive goals, and for another, the conjecture of learning strategies served to indicate where the students are in the LT and help them achieve their learning goals successfully.

According to the findings of this study, researcher put forward the following suggestions for future consideration in professional development for teachers:

1. The places where students encounter difficulties in the textbook can serve as the starting point for encoding, and analyzing mathematical ability indices, exploring the teaching materials, and contemplating the problem-solving strategies of students can guide teachers in improving their teaching.
2. In the clarification and processing stages, teachers need to know about the one-dimensional and two-dimensional measurement to enhance their teaching of area and perimeter, such as the unit output, iterative techniques for measuring, and the extraction of problem-solving strategies. Activities and the conversion of representation can assist students in understanding the meaning of formulas and using them to solve problems.
3. In the design and execution stages, teachers should arrange the learning paths of activities, incorporate the correct and lost concepts of students into tasks by analyzing teaching materials, and continually reflect on how and whether teaching objectives are attained based on the operations, thinking, records, and expressions of their students.

參考資料

- 吳婉儒、蔡鳳秋、楊德清（2005）。故事情境融入國小數學科教學之研究—以面積單元為例。*科學教育研究與發展季刊*，**41**，74-94。
- [Wu, W. R., Cai, F. Q., & Yang, D. Q. (2005). Research into the context of the story — The country in the area of teaching fractional unit as an example. *Scientific Research and Development Education Quarterly*, *41*, 74-94.]
- 徐偉民、徐于婷（2009）。國小數學教科書代數教材之內容分析：臺灣與香港之比較。*教育實踐與研究*，**22**(2)，67-94。
- [Xu, W. M., & Xu, Y. T. (2009). The content analysis of algebra material in the elementary mathematic textbooks of Taiwan and Hong Kong. *Journal of Educational Practice and Research*, *22*(2), 67-94.]
- 陳嘉皇（2004）。國小學童面積概念轉化文本之設計與其教學效果之實驗研究（未出版之博士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。
- [Chen, C. H. (2004). *Experimental research design concept area country school children and teaching effectiveness of the conversion of text*. (Unpublished doctoral thesis). National Kaohsiung Normal University, Kaohsiung, Taiwan.]
- 陳嘉皇（2013）。小六學生運用一般化基模進行圖形規律問題解題之研究。*教育科學研究期刊*，**58**(1)，59-90。
- [Chen, C. H. (2013). Six-year students to apply to study graphic generalization of the fundamental mode of laws problem solving. *Educational Research Journal*, *58*(1), 59-90.]
- 教育部臺灣省國民學校教師研習會（2000）。**國小數學教材分析—整數的乘除運算**。臺北市：作者。
- [The Ministry of Education of Taiwan Province National School Teacher Workshops (2000). *Small country mathematics textbook analysis — Integer multiplication and division operations (1st Ed.)*. Taipei, Taiwan: Author.]
- 教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北市：作者。
- [The Ministry of Education (2008). *National primary and secondary school syllabuses nine-year study in the field of mathematics*. Taipei, Taiwan: Author.]
- 黃幸美（2010）。美國當代小學幾何課程發展與其對臺灣幾何教學的啟示。*教育資料研究集刊*，**45**，233-269。
- [Huang, H. M. (2010). Contemporary American school geometry curriculum development and its implications for Taiwan teaching geometry. *Educational Materials Research Bulletin*, *45*, 233-269.]
- 黃幸美（2012）。數學教學轉化之探討：以一位有經驗教師之面積初步概念教學為例。*教科書研究*，**5**(1)，99-129。
- [Huang, H. M. (2012). Mathematics teaching in the discussion: The teacher of the area experienced a preliminary concept teaching. *Textbook Research*, *5*(1), 99-129.]

- 楊德清、陳仁輝（2011）。臺灣、美國與新加坡三個七年級代數教科書發展學生數學能力方式之研究，*科學教育學刊*，**19**(1), 39-67.
- [Yang, D. Q., & Chen, R. H. (2011). Taiwan, Singapore, the United States and three in seventh grade algebra curriculum students study ways of developing mathematical ability. *Journal of Science Education*, *19*(1), 43-61.]
- 潘亭蓉、曹雅玲（2007）。國小五年級學童面積概念之相關研究。*國教新知*，**54**(1)，24-37。
- [Pan, T. R., & Cao, Y. L. (2007). Studies of fifth grade students the concept of the area. *The State Religion of the Awakening*, *54* (1), 24-37.]
- 譚寧君（1994）。高年級面積教材的分析。載於臺灣省國民學校教師研習會編著，**國民小學數學科新課程概說（高年級）**，134-165，臺北市：教育部。
- [Tan, N. J. (1994). An area of high-grade materials analysis, national primary spirit of the new curriculum. In Taiwan National School Teacher Workshops (Ed.), *National primary school mathematics new curriculum overview say (high grade)* (pp. 134-165). Taipei, Taiwan: National School Teacher Workshops.]
- Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 132-146.
- Battista, M. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 185-204.
- Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Burrow, C. V. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(5), 503-532.
- Brown, M. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17-36). New York, NY: Routledge.
- Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum materials. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 331-353.
- Clements, D., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89.
- Confrey, J., Nguyen, K., Lee, K., Panorkou, N., Corley, A., & Maloney, A. (2012). *TurnOnCCMath.net: Learning Trajectories for the K-8 common core math standards*. Retrieved from <https://www.turnonccmath.net>.
- Darling-Hammond, L., Banks, J., Zumwalt, K., Gomez, L., Sherin, M. G., Griesdorn, J., & Finn, L. (2005). Developing a curricular vision for teaching. In L. Darling-Hammond & J. Bransford (Eds.), *Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do* (pp. 169-200). San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Drake, C., & Sherin, M. G. (2009). Developing curriculum vision and trust: Changes in teachers' curriculum strategies. In J. T. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 321-337). New York, NY: Routledge.

- Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J. W. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one? *Educational Researcher*, 31(5), 3-15.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Kamii, C., & Kysh, J. (2006). The difficulty of "length x width": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 105-115.
- Lloyd, G. (1999). Two teachers' conceptions of a reform-oriented curriculum: Implications for mathematics teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 227-252.
- Lloyd, G., & Wilson, M. S. (1998). Supporting innovation: The impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 248-274.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Olson, J. K., & Ihrig, L. M. (2010, January). *The lethal mutation of content standards: Why inquiry and learning progressions are necessary but insufficient for student learning of central concepts in science*. Paper presented at the annual meeting of the Association for Science Teacher Education, Minneapolis, MN.
- Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2004). *Students' structuring of rectangular arrays*. Paper presented at the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway.
- Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246.
- Remillard, J. T., & Bryans, M. B. (2004). Teachers' orientations toward mathematics curriculum materials: Implications for teacher learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 352-388.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, 41(5), 147-156.

