

以心智習性為主之數學教科書內容 比較研究

陳嘉皇

摘 要

研究目的

本研究旨在透過分析教科書內容，瞭解國小高年級階段教科書設計的幾何圖形主題包含的心智習性類型和比例為何？並比較幾何圖形主題之特色，提供教學實務應用。

研究設計／方法／取徑

資料蒐集與分析採質、量併陳方式，針對國內南一、翰林與康軒三版本教科書有關幾何圖形內容進行分析，以「題」為記錄單位，將課本的佈題依據分析類目進行分類計數。依次計算三套教科書中幾何圖形主題之單元數，在心智習性類型：一般化、關係的推理與探索不變性之題數與百分比；並針對心智習性類型之佈題作質性描述與分析。

研究發現或結論

一、三版本之幾何圖形主題心智習性的內容，以關係的推理和探索不變性兩項數學心智習性為主，兩心智習性合計比例約在 89 至 94%，三版本教科書彼此之間比例相差不大。二、N 版教科書在提供命名、單位換算、物件形體變化和轉換等內容，比例較其他版本多；

陳嘉皇，國立台中教育大學數學教育學系副教授

電子郵件：chench1109@mail.ntcu.edu.tw

投稿日期：2016年6月7日；修正日期：2016年8月17日；接受日期：2017年2月10日

H 版在辨識與分類、描述特徵關係和利用公式運算解題等內容比例最高；K 版在進行物件組合與分解操作、繪圖等心智習性的內容比例最高。三、K 版教科書特色為：透過鏡射理解線對稱圖形定義，操作與觀察實物理解等周長不等面積之圖形變化，應用圓概念之生活工具實測距離，提供示例建立平行四邊形與三角形面積關係；H 版特色為：利用全等三角形各角組成平角瞭解三角形內角的和，利用圓圖形部分與整體關係介紹圓心角，提供繪圖步驟指導放大與縮小圖之實作；N 版特色為：利用幾何圖形折疊實作，探討線對稱現象，運用釘板教導線對稱圖形的繪製，利用顏色的扣條彰顯圖形特徵，工具測量探索圓周率、圓周和直徑的關係，圓規檢視與驗證扇形特徵。

研究原創性／價值

擴展先前研究集中在教科書之單元數、題數、表徵比較分析的主題和範圍，將重點轉移至對教科書內容有關認知成分的探討，提供不同的研究領域和觀點；研究者並對日後研究與教學實務提出建議，作為精進教科書比較分析之參考。

關鍵詞：幾何圖形、教科書、心智習性、線對稱

COMPARISON OF ELEMENTARY SCHOOL MATHEMATICS TEXTBOOKS BASED ON HABITS OF MIND

Chia Huang Chen

ABSTRACT

Purpose

The purpose of this study was to analyze the contents of textbooks regarding the topic of plane figures. The main focus was to explore the habit of mind subject and further to compare the characteristics of several textbooks from different publishers for reference in teaching practice.

Design/methodology/approach

Quantitative statistics and qualitative descriptions were used to analyze the contents of the three textbooks.

Findings

The research found the main two focus of three textbooks were the reasoning with relationships and investigating invariants, and the proportions of these two habits of mind in the contents were ranging from 89% to 94% in three textbooks. Furthermore, Textbook N offers the most content regarding nomenclature, unit conversion, and the variations and conversions of plane figures more than the other two textbooks. Textbook H provides explanations regarding recognition and classification, describes relationships among characteristics, and uses formulas to solve problems. Textbook K contains the most content regarding drawing and composition and decomposition of figures. Additionally, Textbook K uses mirror reflections to explain symmetric figures, manipulates and observes figures to explain that perimeter does not equal area, practices circle concepts to measure distance, and provides examples to establish the relationship between the areas of parallelograms and triangles. Textbook H applies congruent triangles to explain that the angles within a triangle form a

Chia Huang Chen, Associate Professor, Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education, Taichung, Taiwan.

E-mail: chench1109@mail.ntcu.edu.tw

Manuscript received: June 7, 2016; Modified: August 17, 2016; Accepted: February 10, 2017

straight angle, uses the relationships between parts and wholes in circles to explain central angles, and explains the enlarging and reducing of figures via drawing procedures. On the other hand, Textbook N practices the folding of figures to explore symmetry, uses pegboards to teach how symmetric shapes are drawn, uses colors and buckles to accentuate figure characteristics, applies instruments to measure and explain the relationship among PI, circumference, and diameter, and examines and verifies the characteristics of sectors using a compass.

Originality/value

The research extend the findings of previous studies on investigating the number of units and the theme and scope of characterization, shift focus to explore the cognitive components in textbooks, and provide research in different fields and perspectives. Suggestions are provided for future research, educational practices, and the improvement of textbook comparison and analysis.

Keywords: plane figures, textbooks, habits of mind, line of symmetry

壹、緒論

教科書是教師進行教學實務有力的工具，對於數學教導與學習具有舉足輕重的影響（Yang, Reys, & Wu, 2010）。許多學者強調教科書是學習的核心內容、教學方案的精髓，教師想教什麼及學生要學什麼，幾乎可透過教科書來決定。教科書扮演的角色近年來已受到國內外學者的關注和探究（徐偉民、徐于婷，2009；楊德清、陳仁輝，2011；Zhu & Fan, 2006），這些學者的研究發現，影響學生學習成就表現的因素中，學習機會是一重要的因素，而教科書是提供學生學習機會的基礎路徑，除獲取數學知識和概念外，也涵養未來進入社會生存所需的推理、臆測和證明的心智習性。

幾何圖形是學生探究與發展數學概念的場域，空間推理對於支持數學心智習性和檢驗知識的產出可提供實質的保證。Goldenberg 與 Cuoco（1998）就認為幾何圖形能協助學生連結數學，是建立心智習性的有力媒介。教科書的內容可培養一般化、推理的心智習性，因為他提供不同的實例設計，讓學生對物件的宣稱進行論證（Ellis, 2011），在解題或研究的歷程，明白數學家如何處理數學問題，例如，正方形、菱形和其他平行四邊形的圖像或內容，可讓學生觀察與動手操作，探究改變某些特徵後，發生的現象何者一樣？何者會改變？教科書提供實例伴隨說明或具體活動讓學生思考幾何圖形特徵的異同，提出一般化的反應和說明。

學生幾何圖形能力的發展，隨著年級有不同的重點，但彼此互為影響。依據「九年一貫課程綱要」能力指標說明（教育部，2008；陳嘉皇，2013），學生在低年級階段強調圖形的認識、探索和操作，建立「面積」的概念。中年級階段，學生學習運用圖形的構成要素（如：角、邊、面）及其數量性質（角度、邊長、面積）敘述幾何圖形，透過操作，將簡單圖形切割、重組成另一個已知的簡單圖形，推理並利用幾何圖形之面積公式（正方形、長方形）。高年級則認識生活中的幾何圖形（三角形、四邊形、多邊形、圓形、扇形），理解幾何圖形的基本定義並熟練定義的相關操作，應用全等、相似性質於幾何圖形問題的解題上。在能力指標的設定下，高年級學生必須由簡而難，先能辨別圖形，了解圖形的構成要素，再逐步透過操作與觀察學習柱（錐）體的展開圖及透視圖，進而建構完整的圖形概念，才能過渡到柱體體積及表面積之計算與正確解題。教科書內容的鋪陳

和編排，關係到學生幾何認知與解題能力的習得與發展，完善的內容可協助學生幾何概念的建立，從操作中學習概念，將課本的幾何知識結合，有效解決生活實務的問題，因此幾何圖形促進心智習性的培養是一項重要且值得探索的領域。從能力指標檢視學生幾何圖形的發展，低、中年級學習的重點在於圖形與空間特徵的認識與物件性質的理解，高年級階段則強調幾何概念的應用與解題，包含幾何量的運算，所需之心智習性較為廣泛（Cuoco, Goldenberg, & Mark, 2010），且為未來國、高中階段學習必要之基礎，因此本研究之教材分析內容以高年級階段之學習內容為主，以能力指標內涵為依據，包含幾何圖形和其延伸的幾何量運算議題。

數學有許多心智習性，特殊的內容領域有其典型的思考方式。在教室裡，教師需提供學生能連結促進有力思考的活動，讓這些思考的態度協助理解、推理和應用資訊以解決教室內外的問題。Costa 與 Kallick（2009）認為學生連結這些智力的行為是基礎的，也只有經由持續對心智習性所建議的行為加以檢視和行動，才會變成態度。美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）認為學校幾何推理和證明的內容，應建構圖形與空間為論證數學宣稱的多面向內容。研究社群也檢驗出版的課程內容，針對不同階段的教科書加以批判，發現學生對於數學證明的閱讀與寫作產生困難（Healy & Hoyles, 2000），對幾何圖形學習的歷程誤用範例（Bieda, 2010）；當要求學生演繹某結果時，他們運用範例或圖像提供歸納論證，但未合宜的做數學一般化的宣稱（Healy & Hoyles, 2000）。這些發現強調教科書若將幾何圖形視為練習演算，將會帶來重大的危機，因為這樣的數學活動會阻礙學生隨後的學習（Muis, 2004）。幾何圖形提供學生進行論證、下定義與關係推理的重要內容（Cuoco et al., 2010; Kobiela & Lehrer, 2015），教學的內容需能鼓勵學生洞察幾何圖形特徵的必要性，若無法洞察存在的數學觀念，那麼此觀念對其而言將無意義，不能變成學生的心智習性，因此幾何圖形結構與培養心智習性之間的關係非常密切（Herbst & Brach, 2006）。先前的研究集中在教科書之單元數、題數、表徵比較分析的主題和範圍（徐偉民、徐于婷，2009；楊德清、陳仁輝，2011；Zhu & Fan, 2006），將重點置於教科書有關認知成分的探討則較為缺乏，鑑於教科書與數學心智習性之間的關聯和重要性，本研究

目的擬透過教科書內容的分析，瞭解高年級幾何圖形內容包含的心智習性類型和比例為何？並比較分析其幾何圖形內容之特色，提供教學實務應用。具體研究問題為：

- 一、比較現行三套教科書之幾何圖形主題呈現的心智習性的類型與比例為何？
- 二、比較分析教科書幾何圖形主題中心智習性的次類型與比例為何？
- 三、分析三個版本之幾何圖形主題的心智習性特色為何？

貳、文獻探討

一、心智習性的定義與課程設計的關聯

當人類面對困窘和不確定的情境而無法立即明白答案時，智力的表現與應用是非常重要的（Costa & Kallick, 2009）。何謂心智習性？Leikin（2007）認為心智習性為選擇有效智力行為樣式的傾向和能力，他的特徵包括個人的毅力，選擇有效策略的傾向和應用這些策略解決問題；Cuoco、Goldenberg 與 Mark（1996, 2010）認為材料或課程的安排對於學生而言，可培養適應與解決問題的心智習性；對教師而言，則可發展該科目有效的教學專業。依據學習材料的特質，可將心智習性分成兩類：一是任何學科內容皆可培養的一般心智習性，包括辨識圖像、探索、描述、發現、視覺化、臆測與猜想等基本能力或傾向；另一則是某特定學科所欲培養的心智習性，像是數學學科的內涵可提供包含連續性的推理、在極端的環境下形成有啟發性的實驗，與運用數學家工作使用的抽象概念（Mark, Cuoco, Goldenberg, & Sword, 2010）。總結上述學者對心智習性的說明，研究者認為數學的心智習性是種學生經由學習材料的涵養與教導後，將其所培養的做數學概念、技能、策略與情意整合為一習慣，用於解題上稱之。數學的心智習性發展包含兩項主要的特徵：思考和習慣（thinking and habituation）。Harel（2007, 2008）將思考的方式做為思考層面的內涵，視心智習性為內化的思考方式；Goldenberg（2009）將習慣視為是某人對其經歷的曲目（repertoire）能順利獲取、自然處理與完整組合的思考，讓

思考變成良好的心智習性，不僅可容易採用，還可執行。因此心智習性的培養具有兩項重要的特徵：一是心智習性需配合合宜的學習機會才能養成，具備良好的思考方式和內容才能培養有效的心智習性，因此學生接觸的教材與環境對其心智習性的養成有重要的影響。二是心智習性要變成習慣，需長時間持續的接觸相關情境並能有效應用，以使能自動連結並鞏固。教科書的內容可提供學生建立和強化心智習性之用，其內涵與欲培養學生之心智習性有密切關聯。檢驗先前研究文獻（Köse & Tannisli, 2014; Lehrer, Kobiela, & Weinberg, 2012），雖然研究者將幾何教材與心智習性作了連結並探討其間的關聯，但這些研究對樣本獲得的心智表現，發現並未顯現出良好的結果，為何如此？上述研究者建議可從呈現之教材內容加以探究，以瞭解教材本身是否具有有效性。

Eisner（1997）說明學校在於協助學生以有意義的方式擴大他們對數學教材內容的理解。要達到這個目標，心智習性必需被思考成為所有不同課程的目的和結果。Costa 與 Kallick（2009）提出心智習性與課程關係的層次圖（圖 1），認為教師應同時注意每個層級工作，學會保持整體的願景，其重點如下：

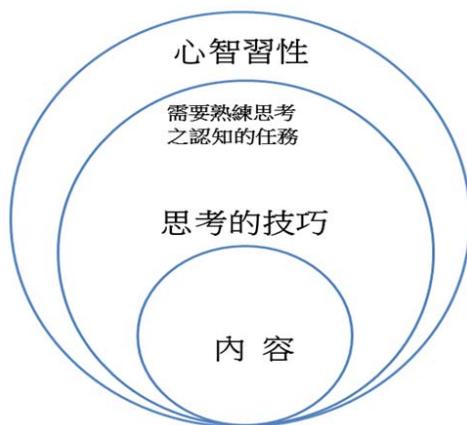


圖 1 Costa 和 Kallick 提出心智習性與課程關係的層次圖

資料來源：Costa, A. L., & Kallick, B. (2009). *Habits of mind across the curriculum: Practical and creative strategies for teachers* (p. 4). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

（一）內容

教師需將重點置於課堂活動的連貫性和累積效應，課程設計工作從回答問題開始，如：學生學習什麼概念和原則？數學學習的能力指標常協助做決策，當成學習內容的媒介，讓教師知道什麼概念或這個活動理解的結果，幫助學生如何理解這些概念。

（二）思考的技巧

教師利用數學學習的能力指標，開始選擇具生成性質（*generative qualities*）的內容（Perrone & Kallick, 1997），透過能力指標期望學生在學習中顯示思維技能和能力。思維的類型通常會嵌入學科的標準，使用特定的思維動詞描述達成內容標準時需做什麼。因此數學的內容就成為體驗、練習和應用創造性和批判性思考過程所需的工具：觀察和收集資料，制定和測試假設，得出結論和提出問題。

（三）需要熟練思考的認知任務

教師確定內容和思維技能後，進一步需設計認知任務，提供學生進行更深層次的思考；計畫意味著每個層次的任務能加深對學科的思考，讓學生處理材料以尋找認知任務的期望。認知任務主要在於透過內容培養數學所需的能力和概念，在能力方面，如透過對兩變數間特性進行推理進而建立關係，像正方形的邊長和內角構成正方形圖形的要素；在概念方面，如觀察或操作任何三角形後，得知三角形的內角和為 180 度。

（四）心智習性

從課程設置的角度來看，學生使用心智習性不僅為了在安排的認知任務中取得成功，還要透過謹慎地應用這些心智習性來確保成功。通過反思和自我評價，可看到心智習性的應用如何轉移到所有學科領域。

上述 Costa 與 Kallick（2009）提出心智習性與課程關係的層次圖，可以理解到數學心智習性的培養與學習的教材內容與認知任務（能力和概念）息息相關。教材內容是培養數學心智習性的根本基礎，唯有良好的任務活動設計，才能培育完善的心智習性。但在培養的歷程，實踐與省思是必要的。除需將他融入存在的課程外，尚須明白學生經歷與習慣有關的心智演變，並將學生意識到的心智習性和從不同情境的基礎逐漸整合，然後採用、反思和評價他們對心智習性內化的使用。

學習是種社會的歷程，不只限於個體努力和智力的功能上（Vygotsky, 1986），亦可從教師、同儕、教材與教學環境的對話形成（Perkins, 1999）。以此觀點做為基礎，採用不同方式解題須變成一種組合學校數學課程的心智習性。解題方法的空間受到個體的經驗和記憶力，及數學任務要求的影響。解題空間是指學生面臨數學問題時，可以獲得的協助和運用的任何資源（Watson & Mason, 2007），這些資源包含：

1. 專家的解題空間：數學家建議的解題方法，一種為傳統的解題方法空間（*Conventional solution space*），透過課程與顯示於教科書而提出，是教師希望能傳遞給學生的知識內容；另一種是非傳統的解題方法空間，包含各種解題的方法，本研究中的關係推理、一般化與探索不變性等心智習性則包含於此兩部分。
2. 個體的解題空間：與個人運用其能力有關，個人的解題空間包含個體可以當場或之後的表現，無須他人協助。這些解題方法可透過問題與解題者心智的接觸而引發；另一種為潛在的解題方法空間（*Potential solution spaces*），即解題者透過他人協助產出的解題方法，協助者可來自教科書、教師和同儕。

任何解題方法變成心智習性，只有屬於他個人的解題方法空間時才能成功，要變成心智習性，解題的方法需成為可解決不同數學問題的個人解題空間才行。從上述文獻的分析，採用不同方法解題，對於心智習性發展數學思考進步的形式與促進數學有關的思考兩種手段，提供一種有效的工具。數學情境的心智習性視為是引導數學課程設計、發展學校數學文化與個體數學推理的法則（Cuoco et al., 1996; Goldenberg, 1996, 2009）。Cuoco 等人（1996）主張所有的心智習性是數學課程組織法則很重要的一部份，且是教師協助學生內化這些習性的基礎。教師必須與學生一起進行幾何圖形問題的探索工作，協助他們表達思考的方式，並且提供有關幾何發展之學習的經驗。國小高年級階段教科書幾何圖形內容的心智習性安排，可提供學生強烈的數學基礎，因為教科書幾何圖形內容安排的心智習性類型，不可避免地會影響未來學生的學習經驗。學習必須積極經由數學一般化、關係的推理與尋找不變性才可整合為數學探索的一部份。如此一方面可引導探索與應用思考至解題的方法上，另一方面，在探索階段應用的概念和不同的數學結構，可引導多元的解題方法或證明至任務中。

二、幾何圖形概念的分析

「幾何圖形」為一種可在空間移動的封閉形狀，有長度、寬度但沒有厚度。本研究指的幾何圖形主要有四種：圓形、三角形、四邊形及多邊形，並包括這些圖形延伸的幾何量等議題。人類是視覺的動物，故以具體物呈現幾何概念在學習中是很重要的課題。國小階段一到三年級，主要以對幾何圖形的觀察、認識、操作及探索；四到六年級則結合「數」與「形」，認識立體與幾何圖形的基本概念，深入探討幾何構成要素及數量的性質，並用此計算幾何圖形之面積、體積；國中一到三年級則著重推理能力的培養，以直觀經驗為前導，強調明確的定義，及相關量的計算，並結合代數演算，進行簡易的證明。國小高年級幾何圖形發展相關的能力指標如表 1。

表 1 呈現學生幾何圖形的發展，高年級階段的學生幾何圖形發展的程度，大都進入 van Hiele (1986) 幾何發展層次的分析期，有一部份逐漸進入非形式演繹階段。他們能注意到圖形組成要素的特性，可利用構成要素造出圖形，並能歸納一些圖形的共同特徵。幾何圖形對高年級學生而言是項學習重點，學生要建立堅實的幾何圖形，需先透過視覺化辨識圖形的特徵，比較特徵的異同進而歸類命名；運用切割重組方式，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式求複合圖形面積；觀察圖形放大縮小比例的關係，歸納規則以解題；最後利用圓相關公式解決複合圖形或扇形的周長和面積問題。

表 1 九年一貫課程綱要幾何圖形之分年細目

編號	分年細目
5-s-01	能透過操作，理解三角形的三內角和為 180 度。
5-s-02	能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。
5-s-03	能認識圓心角，並認識扇形。
5-s-04	能認識線對稱，並理解簡單幾何圖形的線對稱性質。
5-s-05	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
6-s-01	能利用幾何圖形的性質解決簡單的幾何問題。
6-s-02	能認識幾何圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。
6-s-03	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。

資料來源：教育部（2008）。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北：作者。

國小高年級的幾何內容十分重要且複雜，朱建正（1998）認為一般人對幾何知識不多，其中原因可能是小學數學題及幾何的內容不多，故針對國小圖形內容進行分析，建議在學習初期應給予學生多方面具體的操作，感受物體存在的性質與圖形樣貌，發展空間視覺化。van Hiele（1986）認為應提供豐富的幾何設計內容，讓學生透過觀察圖形檢視範例與非例，促進其辨識和分類的工作；其次可利用折疊、尺量和尋找對稱的活動，建立幾何知識網絡中的關係；當學生察覺關係，鼓勵嘗試以話語表達，伴隨幾何物件學習專門語言；再者透過複雜的任務設計，擴展幾何物件的關係網絡，例如知道一種四邊形的性質後，調查另一種四邊形，如箏形的同類性質；最後學生藉由課程設計省思所學，形成自己的幾何知識網絡，例如整合一種圖形的各種性質。

幾何圖形的抽象特質，必須藉著實物的結構來呈現。課程設計除強調從操作、觀察活動中探討圖形的概念及結構的特性外，也應注意學生從幾何圖形發展的心智習性。在這樣的配合下，期使學生經由做、說、聽、看、讀、寫（畫）等的觀察、討論、分析及推論之過程，對幾何圖形與運用能獲得有意義的學習。幾何圖形的學習與心智習性的涵養彼此關係密切（Driscoll, DiMatteo, Nikula, & Egan, 2007; Costa & Kallick, 2009; van Hiele, 1986），教科書若能提供學生動手操作機會，並利用具體實物觀察，發現特性與構成的要素之間的關係，這樣的題材將能提供學生心智發展的機會，也能提升學生學習的興趣。

三、數學幾何心智習性的內容

數學的心智習性進入幾何和代數等數學領域時，可稱為代數或幾何的心智習性（Driscoll, 1999; Mark et al., 2010）。幾何教材所欲培養的心智習性是種建設性的思考方式，包含探索幾何的關係與對這些關係的推理、一般化幾何的概念、探究這些關係裡的變數和不變性，並運用這些元素評估幾何的圖像（Driscoll et al., 2007）。Driscoll 等人（2007）透過分析教科書幾何教材的呈現以定義所需的思考方式，包含四項基礎的幾何心智習性：關係的推理、一般化幾何的概念、探索不變性，與探索和省思的平衡。幾何的心智習性在於思考幾何物件或情境中連續性的變異、動態改變的系統、連續性的形變和連續性的功能，以能從變動中發現幾何物件的不變性，利用一般化的方式歸納幾何物件的特徵，以進行幾何圖形的推理和解題。

數學心智習性是可培養且正向維持的 (Cuoco et al., 2010; Driscoll et al., 2007; van Hiele, 1986), 因此教科書設計的任務須與重要的心智習性相連結, 像是一般化、關係的推理、探究不變性、探索和省思的平衡或是願景 (Driscoll et al., 2007)。所謂一般化是指對廣泛的結構或樣式進行探索而獲得保證的知識, 以能掌握任何特殊案例或案例集合的傾向 (Goldeberg & Cuoco, 1998)。例如教科書提供生活中常接觸的圖形, 要求學生觀察這些圖形的特徵, 將具有相同特徵的圖形歸於一類; 關係推理指的是探索圖形特徵所含概念之間關係的傾向 (van Hiele, 1986), 例如教科書範例讓學生根據幾何圖形的形狀特徵加以命名, 發現形狀名稱與邊數的關係; 不變性的探究是指探索物件變動中某特質仍保持一致性的傾向 (Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000), 例如教科書安排某一複合圖形, 協助學生利用分、合、移、補的策略, 發現運算出的面積答案皆相同, 變動和不變性可用傳統的技术像是圖像、表格方式加以視覺化。上述三種心智習性的特質可容易從教材中辨識, 透過觀察、操作呈現出教材的認知結構。Driscoll 等人 (2007) 認為學生探究的幾何教材若能透過上述三種心智習性為基礎深入發展, 將會引導思考並反過來滋養幾何概念的發展, 在此過程中, 學生因上述三種心智習性的成長而能對環境主動探索, 省思這些心智習性的運作; 然而, 探索和省思的平衡或願景是學生學習幾何教材後的一種後設認知的表現, 只有在教學和解題歷程, 透過學習者的陳述才易觀察, 不易掌握與分析。綜合上述分析, 本研究所欲探究的幾何心智習性係指對幾何物件的思考方式, 利用這些物件之間的特質進行關係推理、一般化概念與探索不變性的習性或傾向。思維的方式或心智習性的培養被數學家認為是重要的工作, 因為這些心智習性對於以量化或空間的觀點對數學本身和不同的數學領域進行推理, 是非常有用的。因此, 可以將操作和學習數學視為是積極的感覺數學的材料和活動。

四、三套教科書幾何圖形主題分佈

本研究針對台灣國小高年級階段幾何圖形主題發展心智習性的內容進行分析比較, 資料選取採用立意取樣方式, 選擇「南一」(N 稱之)、「翰林版」(H 稱之)及「康軒版」(K 稱之)三套數學教科書中幾何圖形相關主題作為研究對象。這三套教科書皆通過教育部審核發行, 各版本編撰及諮詢委員皆由數學教育界學識豐富、教學專長人士組成, 設計之內容皆能遵循九年一貫數學領域之能力指標, 提供豐富內容予以師生應用。

本研究比較分析之教科書，為 104 學年度小學採用之五、六年級版本。各版本教科書之幾何圖形相關單元名稱、頁數和內容彙整如表 2、3、4、5 所示。

表 2 N 版幾何圖形主題相關單元名稱、頁數和內容

學期	單元名稱	頁次	內容
五上	3. 多邊形	31-42	1. 多邊形 2. 正多邊形 3. 三角形邊長的性質 4. 多邊形內角的和 5. 多邊形內角和的應用
	5. 線對稱圖形	75-68	1. 認識線對稱圖形及對稱軸 2. 認識對稱點、對稱邊和對稱角 3. 畫出線對稱圖形 4. 剪出線對稱圖形
	8. 平行四邊形、三角形和梯形的面積	97-110	1. 平行四邊形的面積和高 2. 三角形的面積和高 3. 梯形的面積和高 4. 面積的變化 5. 面積公式的應用
五下	3. 扇形	33-44	1. 認識扇形 2. 認識圓心角 3. 認識 $1/2$ 圓、 $1/3$ 圓……的扇形 4. 繪製扇形 5. 扇形的應用 6. 認識球體
	6. 生活中的大單位	78-84	1. 認識公畝和公頃 2. 平方公尺、公畝和公頃的換算及應用 3. 認識平方公里 4. 平方公尺、公畝、公頃和平方公里的換算及應用
六上	5. 圓周率和圓面積	53-64	1. 認識圓周率 2. 圓面積 3. 圓面積的應用
	6. 扇形面積	69-78	1. 扇形的周長 2. 扇形的面積 3. 扇形面積的應用 4. 複合圖形
六下	4. 縮圖和比例尺	37-48	1. 縮圖和放大圖 2. 對應點、對應角和對應邊 3. 繪製縮圖和放大圖 4. 比例尺
8 單元		93 頁	35 議題

表3 H版幾何圖形主題相關單元名稱、頁數和內容

學期	單元名稱	頁次	內容
五上	4. 幾何圖形	47-60	1. 三角形的邊長關係 2. 三角形的內角和是 180 度 3. 認識多邊形 4. 正多邊形 5. 扇形和圓心角
	8. 面積	93-110	1. 平行四邊形的面積 2. 三角形的面積 3. 梯形的面積 4. 面積公式的應用
	10. 線對稱圖形	125-134	1. 認識線對稱圖形 2. 對稱點、對稱角、對稱邊 3. 常見的線對稱圖形
五下	1. 生活中的大單位	10-14	1. 認識公畝、公頃和平方公里
六上	6. 圓	76-89	1. 圓周率 2. 圓周率的運用 3. 點數圓面積 4. 圓面積公式與計算
	7. 圓的複合圖形	90-99	1. 扇形面積 2. 複合圖形的面積 3. 扇形周長 4. 複合圖形的周長
	8. 放大與縮小	100-111	1. 放大圖與縮小圖 2. 放大、縮小的相對關係 3. 製作放大圖、縮小圖 4. 放大、縮小的面積關係
六下	3. 地圖和比例尺	34-43	1. 認識地圖 2. 比例尺
8 個單元		93 頁	27 議題

各版本教科書皆設計「生活常用的大單位單元」，內容包含重量和面積單位，由於本研究重點在幾何圖形相關議題，故大單位單元中的重量議題不予分析，只包含面積單位的議題；而關於縮圖、放大圖與比例尺與圖形空間的大小特質具有關聯，因此納入分析的範圍。另教科書的內容發展主要依循能力指標要求，因此將幾何圖形牽涉的幾何量運算議題，包含測量、面積與體積亦納入予以分析。表 5 所示，三套教科書幾何圖形內容分佈於五上至六上，其中 N 版和 H 版將縮圖與放大圖安排在六下介紹，K 版安排於六上。與表 1 相較，三套教科書設計之內容範圍與能力指標大致

表 4 K 版幾何圖形主題相關單元名稱、頁數和內容

學期	單元名稱	頁次	內容
五上	3. 多邊形與扇形	39-50	1. 三角形的邊長關係 2. 三角形的內角和 3. 多邊形 4. 認識扇形及圓心角
	6. 面積	77-92	1. 平行四邊形的面積 2. 三角形的面積 3. 梯形的面積 4. 複合圖形的面積
五下	5. 線對稱圖形	57-69	1. 認識線對稱圖形 2. 對稱點、對稱邊和對稱角 3. 繪製線對稱圖形
	7. 生活中使用的大單位	92-98	1. 公畝、公頃和平方公里
六上	7. 圓周長	101-110	1. 圓周長 2. 圓周率 3. 圓周率的應用（含扇形的周長）
	8. 圓面積	111-122	1. 非直線邊的平面區域面積 2. 圓面積公式 3. 圓面積公式的應用（含扇形的面積）
	10. 縮圖、放大圖與比例尺	137-148	1. 縮圖和放大圖 2. 繪製放大圖和縮圖 3. 比例尺
7 個單元		82 頁	21 個議題

表 5 三套之單元數、頁數、內容數與分佈年段

版本	單元數	頁數	內容數	分佈年段（括弧內數字表示單元數）
N	8	93	35	五上（3）、五下（2）、六上（2）、六下（1）
H	8	93	27	五上（3）、五下（1）、六上（3）、六下（1）
K	7	82	21	五上（2）、五下（2）、六上（3）

相符，包含圖形特徵的介紹，透過操作理解三角形特質；介紹切割重組策略進行圖形面積解題，認識線對稱圖形與放大縮小概念，理解圓面積與周長公式，計算簡單扇形面積。從教學目標的培育分析，三套的內容皆能符應能力指標各年段的要求，即五年級先介紹幾何圖形特徵，透過操作與圖示協助學生明瞭圖形的構造和組成要素，進而帶入圖形周長和面積的計算解題；六年級內容則引入圓形與複合圖形，提供聰慧解題策略，協助解決複合圖形面積問題。內容編排差異之處有：

- (一) 針對扇形介紹，N版分別於五下設計認識扇形單元，六上獨立一單元安排扇形面積的計算，H與K版則將他納圓面積單元裡介紹提供面積計算問題；
- (二) K版將圓周和圓面積分成2個連續單元呈現於六上，N版和H版則以一單元介紹圓的這兩種概念；
- (三) N版於五下扇形單元提及圓心角，H與K版則於五上幾何圖形相關單元介紹扇形和圓心角。

參、研究方法與步驟

一、研究方法

本研究採質、量並行之內容分析法進行，量化部分進行幾何圖形單元相關類型與比例分析，包括幾何圖形相關的單元數、心智習性類型的題數、主題在各年級的分佈情況及單元順序的關係，宏觀的看出不同版本提供學生學習機會上的不同。質性部分則進行特色探討，著重在各單元幾何概念呈現的心智習性特色的描述，關於特色的分析，主要透過三版教科書內容比較後，針對不同或特殊的心智習性之任務活動，像是強調觀察、作圖、測量、策略應用等能力和概念的展現予以提出。研究架構如圖2所示。

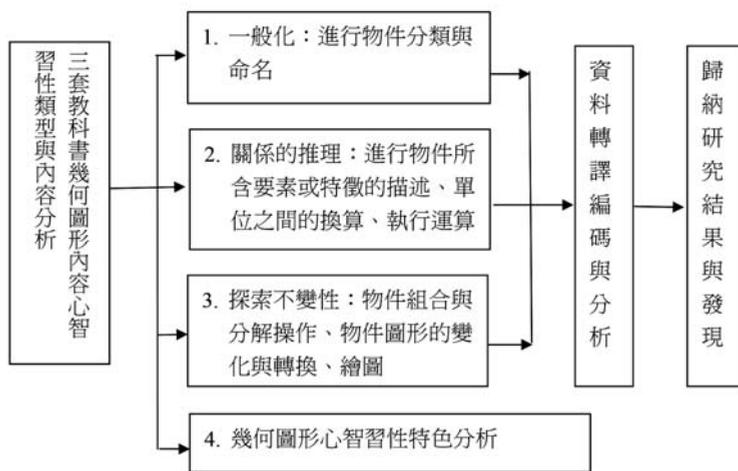


圖2 本研究架構圖

二、資料分析與處理

根據學者 (Cuoco et al., 1996; Driscoll et al., 2007; Costa & Kallick, 2009) 等人對於心智習性的定義與說明，綜合歸納採用一般化、關係的推理、探究不變性等三種心智習性類型作為架構，並依學者對此心智習性的思考和習慣所呈現的概念和能力進行教科書任務活動的分析，發現每類的心智習性依其特質可再細分為 2 至 3 個屬性的子類型，這些子類型只是心智行動上有所差異，在認知發展上並無層次之分。相關說明如下：

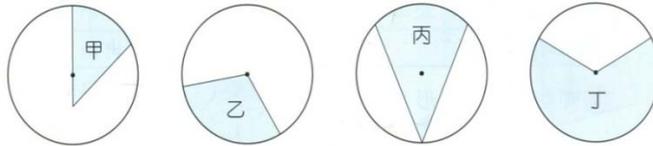
(一) 一般化 (以 G 表示) 的心智習性：對任務的結構或樣式進行探索而獲得保證的知識，以能掌握任何特殊案例或案例集合的傾向 (Goldeberg & Cuoco, 1998)，本研究教科書設計的題目特徵指觀察物件屬性後予以歸類或尋找共通的規則，可包含 2 個類型：

1. 辨識物件與分類 (G1)：數學任務呈現的內容，要求學生運用觀察，對幾何圖形物件的特徵加以辨識，並依據屬性予以分類，範例如圖 3 所示。
2. 進行物件的命名 (G2)：運用物件特徵的觀察，將相似類型的物件予以歸類並命名，像正 10 邊形有 10 條等長的邊、10 個頂點，範例如圖 4 所示。

(二) 關係推理 (以 R 表示)：探索圖形特徵所含概念之間關係的傾向 (van Hiele, 1986)，本研究教科書的任務設計特徵指建立物件之間的關係，像數學要素之間的特徵和類型之關聯，包含 3 個類型：

1. 進行物件構成所需要素或特徵的描述 (R1)，指幾何圖形之間或其內的要素有明確的關係推論，例如討論放大或縮小圖的特徵，包含對應角、對應邊、對應頂點等要素，範例如圖 5 所示。
2. 進行單位之間的換算 (R2)：任務活動或內容呈現數學物件大小單位之間的關係與轉換，例如 1 公頃等於 100 公畝，範例如圖 6 所示。
3. 執行運算步驟 (R3)：為求得幾何圖形的面積或周長，任務活動或內容要求採取整合數學物件結構或關係的公式運算解題，範例如圖 7 所示。

② 下面各圖形的塗色部分, 哪些是扇形?



說說看, 你是怎麼知道的?

圖 3 物件辨識與分類活動

資料來源: 康軒文教事業 (2015a)。康軒版國小數學課本第九冊 (頁 46)。臺北: 作者。

②

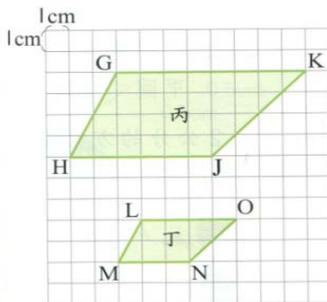


左圖有幾條邊? 幾個角? 幾個頂點?
 是什麼圖形?

圖 4 物件命名活動

資料來源: 康軒文教事業 (2015a)。康軒版國小數學課本第九冊 (頁 44)。臺北: 作者。

② 丁圖是丙圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖, 找出各組對應頂點、對應邊及對應角。



對應頂點			
丙圖	點G		
丁圖	點L		

對應邊			
丙圖	\overline{GH}		
丁圖	\overline{LM}		

對應角			
丙圖	$\angle G$		
丁圖	$\angle L$		

圖 5 進行物件構成所需要素或特徵的描述

資料來源: 翰林出版事業 (2015c)。翰林國小數學課本第十一冊 (頁 105)。臺南: 作者。

大單位面積的乘法應用

6 中正紀念堂的自由廣場面積大約有1公頃44公畝，二二八紀念公園大約是它的5倍大，二二八紀念公園的面積大約是幾公頃幾公畝？

	ha	a	
	1	44	
X		5	
	5	220	← 220公畝是 2公頃20公畝。

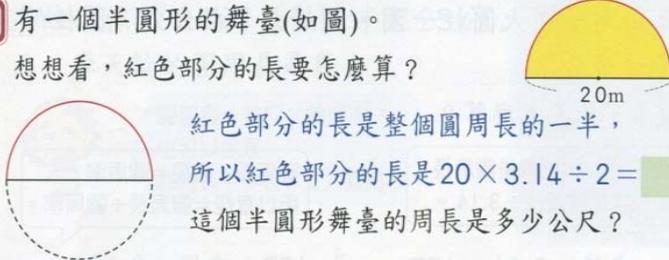


圖 6 進行單位之間的換算

資料來源：翰林出版事業（2015b）。翰林國小數學課本第十冊（頁 27）。臺南：作者。

9 有一個半圓形的舞臺(如圖)。

想想看，紅色部分的長要怎麼算？



紅色部分的長是整個圓周長的一半，
所以紅色部分的長是 $20 \times 3.14 \div 2 =$

這個半圓形舞臺的周長是多少公尺？

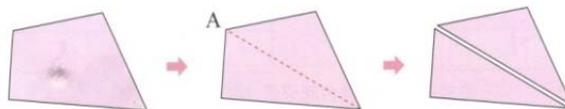
圖 7 執行運算步驟

資料來源：康軒文教事業（2015b）。康軒版國小數學課本第十一冊（頁 108）。臺北：作者。

(三) 探索不變性(以 U 表示)：指探索物件變動中某特質仍保持一致性的傾向(Hadas et al., 2000)，本研究教科書任務設計的特徵指朝向發現幾何圖形變動中的不變性或現象，可區分成三種類型。

1. 物件組合與分解操作(U1)：任務活動要求將物件的要素予以組合或分解，呈現幾何圖形之特徵，例如將四邊形分解成兩個三角形，每個三角形的內角和是 180 度，進而理解四邊形的內角和為 360 度的由來，範例如圖 8 所示。

⑤ 拿出附件 P21 的圖卡做做看，四邊形內各角的和是幾



從頂點 A 畫對角線，四邊形可以分成 2 個三角形。

三角形內各角的和是 180°

四邊形內各角的和是 $180^\circ \times 2 = 360^\circ$

圖 8 物件組合與分解操作

資料來源：南一書局（2015a）。南一國小數學課本第九冊（頁 40）。臺南：作者。

2. 圖形物件的變化與轉換（U2）：任務活動要求將圖形予以展開其構成要素，或複合圖形的物件可透過分、合、移、補方式，再利用各物件最基本的規則或公式求取答案，例如複合圖形求扇形重疊部分面積，分別利用正方形和圓形面積公式求出圖形面積，再採取全部正方形的面積減去扇形面積後剩餘的面積，再重複減去剩餘面積，可得到著色部分圖形的面積，範例如圖 9 所示。
3. 測量與繪圖（U3）：任務活動要求透過描繪方式補充圖形之要素，以明瞭和呈現該圖形的結構，範例如圖 10 所示。

三、分析單位與類目

分析單位與類目是依據研究目標，參考相關文獻，自行修定而成。分析單位與類目發展以 Cuoco 等人（2010）、Driscoll 等人（2007）和 Costa 與 Kallick（2009）的心智習性模式作為基礎加以探討分析。以數學教科書為研究對象，分析單位採用「題」為記錄單位，依據分析類目進行分類計數。分析範圍以教科書為主，習作、教師手冊、教學指引、學習單等不列入計數範圍；僅包含教科書中之例題、練習題、教學活動等。先以「單元」作區分，再以「題」作為最小分析單位。

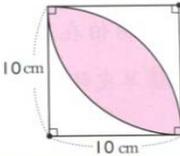
（一）「題」的定義

題目的敘述只包含一問題則計數為 1 題，如圖 11，問題雖提供 4 個圖形的圖示，但皆要求判斷扇形重要的要素，因此計數為 1 題。

5 算算看，右圖中塗色部分的面積大約是幾平方公分？

$10 \times 10 = 100 \dots\dots$ 
 $10 \times 10 \times 3.14 \times \frac{1}{4} = 78.5 \dots\dots$ 
 $100 - 78.5 = 21.5 \dots\dots$ 
 $100 - 21.5 \times 2 = 57 \dots\dots$ 

答：約 57 平方公分

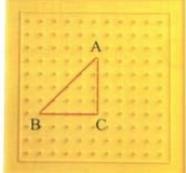
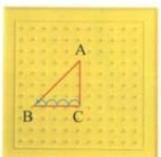
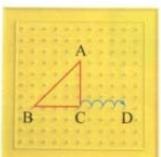
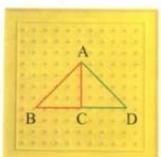


可以看成一個正方形減掉兩個  的面積，也就是  -  = 

圖 9 物件圖形的變化與轉換

資料來源：南一書局（2015c）。南一國小數學課本第十一冊（頁 75）。臺南：作者。

3 右圖是一個以線段 AC 為對稱軸的線對稱圖形，請完成另一半。說說看，你是怎麼做的？

點 B 到對稱軸的距離是 4 格。

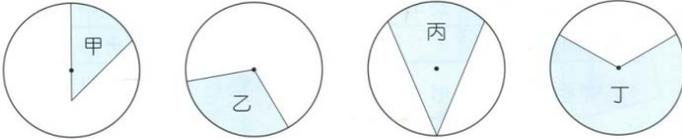
先找出點 B 的對稱點。

再把點 A、點 C 和點 D 連起來。

圖 10 繪圖

資料來源：南一書局（2015a）。南一國小數學課本第九冊（頁 65）。臺南：作者。

2 下面各圖形的塗色部分，哪些是扇形？



說說看，你是怎麼知道的？ 9/1

圖 11 1 題之定義

資料來源：康軒文教事業（2015a）。康軒版國小數學課本第九冊（頁 46）。臺北：作者。

題組式題目, 每小題計數為 1 題, 如圖 12, 問題雖要求寫出圖形的對應的要素, 但 3 小題呈現的對應要素不同, 引發的答案不同, 因此計數為 3 題。

(二) 類目劃記原則

1. 劃記原則以「題」為劃記單位, 進行文字以及圖形之分析。
2. 僅針對課本中之教學活動題及習題作分析。
3. 題組形式之題目, 則依小題各自劃記。

(三) 資料處理

1. 依次計算三套教科書中主題幾何圖形內容之單元數, 在心智習性類型: 一般化、關係的推理與探索不變性之題數與百分比。
2. 質性分析方面則根據量化的結果加以分析說明; 並針對心智習性類型之佈題做質性描述與分析。

四、本研究之信、效度檢定

(一) 分析類目表的信度

內容分析法的信度分析, 是指研究者能夠依據研究中設定的分析單位與類目, 將內容歸類至相同的分析單位與類目中, 使其所得之結果一致。

② 丁圖是丙圖的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖, 找出各組對應頂點、對應邊及對應角。

對應頂點			
丙圖	點G		
丁圖	點L		

對應邊			
丙圖	GH		
丁圖	LM		

對應角			
丙圖	$\angle G$		
丁圖	$\angle L$		

圖 12 題組中題數之定義

資料來源: 翰林出版事業 (2015c)。翰林國小數學課本第十一冊 (頁 105)。臺南: 作者。

本研究採用「評分者信度」作為信度的檢驗方式，將內容單位分派至各類目進行一致性程度的評量，評分員彼此對單位的同意度與一致性越高，表示該研究的信度越高。

本研究之信度檢驗，由兩位評分員連同研究者共 3 人一同進行，此兩位評分員為教學資歷豐富之國小老師。信度分析的步驟：從現行國小三套教科書，選取幾何圖形主題相關單元，進行分類編碼。將類目表及分類規則給予兩位評分員閱讀，說明歸類原則與劃記方式。評分員之間對分類方法進行充分溝通後各自進行類目分析表之歸類。採用「評分者信度」，首先算出評分者間「相互同意值 (P_i)」，再求得「平均相互同意值 (P)」，最後運用依伯格納簡易信度公式求出信度 (R)，施測結果所獲致的信度須大於標準 0.8。

在類別發展的過程中，反覆進行討論、求其周延、明確，且沒有遺漏重要項目，能切合研究的需要。本研究參考三套教科書之幾何教學綱要、教學目標與國內外相關研究(教育部, 2008; 楊德清, 陳仁輝, 2011; Cuoco et al., 2010) 工具，確立分析之架構；類目編製過程中，多次與研究人員討論並修正，分類編碼前，亦與評分員做充分的討論與溝通，以建立本研究類目的效度。

肆、研究結果與討論

一、教科書主題提供心智習性發展內容分析

有關三套教科書之幾何圖形主題包含心智習性類型的比例，如表 6、7、8、9 與圖 13 所示。

從上述分析資料得到以下結果：

- (一) 三套教科書設計之任務或活動，皆符合學者 (Cuoco et al., 1996; Driscoll et al., 2007; Costa & Kallick, 2009) 等人強調幾何教材應提供的心智習性的內涵和特徵，編者皆期盼學生能透過對教材進行思考和習慣的建立，培養一般化、關係推理和不變性的概念和能力。

表6 N版教科書幾何圖形主題之心智習性類型與內容比例分析

單元名稱	題數	心智習性的類型題數（比例）		
		一般化（%）	關係推理（%）	探索不變性（%）
1. 多邊形	51	10(19.61)	31(60.78)	10(19.61)
2. 線對稱圖形	39	4(10.26)	7(17.95)	28(71.79)
3. 平行四邊形三角形和梯形的面積	48	0	19(39.58)	29(60.42)
4. 扇形	50	16(32.0)	9(18.0)	25(50.0)
5. 生活中的大單位	33	0	33(100.0)	0
6. 圓周率和圓面積	37	0	26(70.27)	11(29.73)
7. 扇形面積	35	0	17(48.57)	18(51.43)
8. 縮圖和比例尺	37	6(16.22)	27(72.97)	4(10.81)

註：比例之算法為各單元心智習性的題數分佈除以該單元的題數

表7 H版教科書幾何圖形主題心智習性類型與內容比例分析

單元名稱	題數	心智習性的類型題數（比例）		
		一般化（%）	關係推理（%）	探索不變性（%）
1. 幾何圖形	59	0	46(78.0)	13(22.0)
2. 面積	74	0	48(64.86)	26(35.14)
3. 線對稱圖形	55	18(32.73)	22(40.0)	15(27.27)
4. 生活中的大單位	24	0	24(100.0)	0
5. 圓	27	0	22(81.48)	5(18.52)
6. 圓的複合圖形	20	0	9(45.0)	11(55.0)
7. 放大與縮小	27	2(7.41)	20(74.07)	5(18.52)
8. 地圖與比例尺	23	3(13.04)	18(78.26)	2(8.70)

註：比例之算法為各單元心智習性的題數分佈除以該單元的題數

表8 K版教科書幾何圖形主題心智習性類型與內容比例分析

單元名稱	題數	心智習性的類型題數（比例）		
		一般化（%）	關係推理（%）	探索不變性（%）
1. 多邊形與扇形	51	15(29.41)	26(50.98)	10(19.61)
2. 面積	57	0	24(42.11)	33(57.89)
3. 線對稱圖形	61	1(1.64)	6(9.84)	54(88.52)
4. 生活中使用的大單位	37	0	37(94.59)	0(5.41)
5. 圓周長	28	0	25(89.29)	3(10.71)
6. 圓面積	32	0	11(34.38)	21(65.62)
7. 縮圖放大圖與比例尺	35	1(2.86)	29(82.86)	5(14.29)

註：比例之算法為各單元心智習性的題數分佈除以該單元的題數

表 9 三套教科書幾何圖形主題心智習性類型與內容比例比較分析

教科書版本	總題數	心智習性的類型題數（比例）		
		一般化（%）	關係推理（%）	探索不變性（%）
N 版	330	36(10.91)	169(51.21)	125(37.88)
H 版	309	23(7.44)	209(67.64)	77(24.92)
K 版	301	17(5.65)	158(52.49)	106(35.22)

註：比例之算法為各版本心智習性的題數分佈除以該版本的總題數

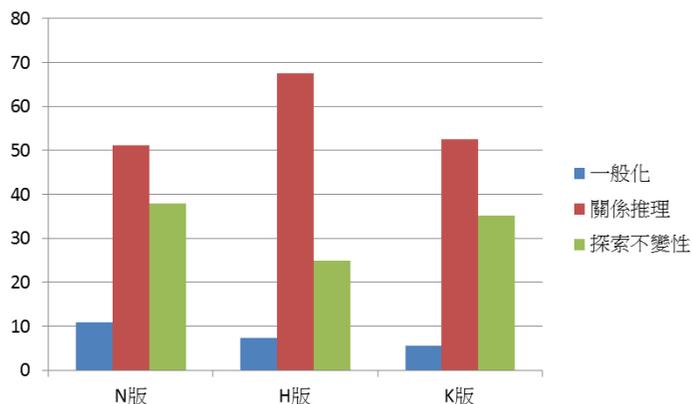


圖 13 三套提供心智習性發展內容之比較分析

- (二) 三套教科書提供發展心智習性的幾何圖形主題內容，以關係推理和探索不變性兩大數學心智習性為主，合計比例為 89 至 94%，彼此間比例差異不大，這樣高比例的安排旨在期盼教科書的內容能引導學生透過幾何圖形的介紹，瞭解幾何圖形本身要素之間的關係，藉由這些特徵的關聯建立面積和周長的公式概念，以解決複合圖形問題。
- (三) H 版在幾何圖形提供的關係推理心智習性內容比例的安排為 67.64%，明顯高於 N 版和 K 版，教材設計偏重於探索圖形特徵所含概念之間關係的傾向 (van Hiele, 1986)，N 版和 K 版比例相近 (為 51.21 與 52.49%)；在探索不變性部分，N 版和 K 版比例相近 (37.88 與 35.22)，但比例明顯高於 H 版。

- (四) 對於提供心智習性一般化的發展，內容比例依次為 N 版 > H 版 > K 版，其中 N 版比例最大為 10.91%，K 版最少為 5.65%，在此部分 N 版安排的內容比例約為 K 版的 2 倍，教材分佈偏向結構或樣式的探索，掌握特殊案例或案例集合的特徵 (Goldeberg & Cuoco, 1998)。
- (五) 總結上述分析結果，針對心智習性內容安排予以區分，H 版教科書明顯著重在關係推理心智習性教材的提供，N 版和 K 版重點在於一般化和探索不變性。

二、教科書發展心智習性內容重點分析

針對幾何圖形單元之心智習性內容重點的分析比較，三套教科書呈現的結果，如表 10、11、12、13 與圖 14 所示。

從上述分析資料獲得以下結果：

- (一) N 版教科書在提供一般化的命名 (5.45%)、關係推理的單位換算 (16.36%)、與探索不變性的物件形體變化和轉換 (12.42%) 等內容，其比例較其他版本多，對於關係推理中的運用公式計算 (14.85%) 與探索不變性的繪圖 (13.94%) 心智習性活動的比例最少，其餘的內容比例則介於三套之間。
- (二) H 版在一般化的辨識與分類、關係推理的特徵關係描述 (26.86%) 和利用公式運算解題 (28.80%) 等心智習性的內容比例最高；在探索不變性之進行物件所含要素或特徵的描述 (3.56%)，H 版的內容比例最低；對於一般化之圖形命名心智習性活動則未安排 (0%)，單位換算的比例則與 K 版相近。
- (三) K 版在探索不變性之物件組合與分解操作 (14.62%)、繪圖 (26.25%) 等心智習性的內容比例最高，這些內容與對形體特徵之間關係的操作和連結有關；對於關係推理之進行物件構成所需要素或特徵的描述 (13.62%)，與探索不變性物件形體的變化與轉換 (1.0%)，K 版提供的內容比例最低。

表 10 N 版之心智習性子類型題數與比例分析

心智習性 類型 版本單元 (題數)	一般化 (%)		關係的推理 (%)			探索不變性 (%)		
	G1	G2	R1	R2	R3	U1	U2	U3
N1(51)	4(7.84)	6(11.76)	22(43.14)	1(1.96)	8(15.69)	10(19.61)	0	0
N2(39)	2(5.13)	2(5.13)	7(17.95)	0	0	12(30.77)	0	16(41.03)
N3(48)	0	0	12(25.0)	0	7(14.58)	0	16(33.3)	13(27.08)
N4(50)	12(24.0)	4(8.0)	3(6.0)	0	6(12.0)	12(24.0)	2(4.0)	11(22.0)
N5(33)	0	0	0	33(100.0)	0	0	0	0
N6(37)	0	0	6(16.22)	20(54.05)	0	4(10.81)	5(13.51)	2(5.41)
N7(35)	0	0	0	0	17(48.57)	0	18(51.43)	0
N8(37)	0	6(16.22)	16(43.24)	0	11(29.73)	0	0	4(10.81)

表 11 H 版之心智習性子類型題數與比例分析

心智習性 類型 版本單元 (題數)	一般化 (%)		關係的推理 (%)			探索不變性 (%)		
	G1	G2	R1	R2	R3	U1	U2	U3
H1(59)	0	0	27(45.76)	0	19(32.20)	2(3.39)	0	11(18.64)
H2(74)	0	0	5(6.76)	0	43(58.11)	0	3(4.05)	23(31.08)
H3(55)	18(32.73)	0	22(40.0)	0	0	8(14.55)	0	7(12.73)
H4(24)	0	0	0	24(100.0)	0	0	0	0
H5(27)	0	0	4(14.81)	0	18(66.67)	0	0	5(18.52)
H6(20)	0	0	0	0	9(45.0)	0	11(55.0)	0
H7(27)	2(7.41)	0	20(74.07)	0	0	0	0	5(18.52)
H8(23)	3(13.04)	0	5(21.74)	13(48.15)	0	1(4.35)	0	1(4.35)

表 12 K 版之心智習性子類型題數與比例分析

心智習性 類型 版本單元 (題數)	一般化 (%)		關係的推理 (%)			探索不變性 (%)		
	G1	G2	R1	R2	R3	U1	U2	U3
K1(51)	14(27.45)	1(1.96)	10(19.61)	0	16(31.37)	3(5.88)	0	7(13.73)
K2(57)	0	0	8(14.04)	0	16(28.08)	14(24.56)	3(5.26)	16(28.08)
K3(61)	1(1.64)	0	6(9.84)	0	0	15(24.59)	0	39(63.93)
K4(37)	0	0	2(5.41)	35(94.59)	0	0	0	0
K5(28)	0	0	0	0	25(89.29)	1(3.57)	0	2(7.14)
K6(32)	0	0	1(3.13)	0	10(31.25)	11(34.38)	0	10(31.25)
K7(35)	0	1(2.86)	14(40.0)	2(5.71)	13(37.14)	0	0	5(14.29)

表 13 三套教科書之心智習性子類型題數與比例比較分析

版本(題)比較項目		心智習性子類型								
		G1	G2	R1	R2	R3	U1	U2	U3	
N(330)	題數	18	18	66	54	49	38	41	46	
	比例%	5.45	5.45	20.0	16.36	14.85	11.52	12.42	13.94	
H(309)	題數	23	0	83	37	89	11	14	52	
	比例%	7.44	0	26.86	11.97	28.80	3.56	4.53	16.83	
K(301)	題數	12	2	41	37	80	44	3	79	
	比例%	4.98	0.66	13.62	12.29	26.58	14.62	1.0	26.25	

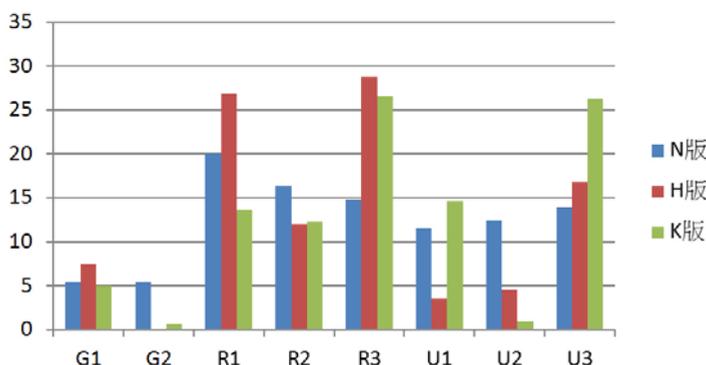


圖 14 三套教科書之心智習性子類型題數與比例比較分析

註：縱座標數字表示比例；G1 為辨識物件與分類，G2 為進行物件的命名；R1 為進行物件構成所需要素或特徵的描述，R2 為進行單位之間的換算，R3 為執行運算步驟；U1 為物件組合與分解操作，U2 為圖形物件的變化與轉換，U3 為測量與繪圖。

- (四) 針對一般化、關係推理與探索不變性等心智習性之內涵分佈比例加以分析，N 版在這三種心智習性的各類型分佈較為平均，分別為一般化(5.45%, 5.45%)、關係推理(20.0%, 16.36%, 14.85%)，探索不變性(11.52%, 12.42%, 13.94%)，H 版和 K 版則各類型的心智習性內容分佈差異較大。
- (五) 總結上述分析結果，N 版教材的分佈集中在關係推理此心智習性，包含進行物件所含要素或特徵的描述、單位之間的換算、執行運算步驟，另外強調繪圖此能力；H 版的教材雖也集中於關係推理此心智習性，但重點置於進行物件所含要素或特徵的描述與執行運算步驟；K 版則明顯強調執行運算步驟和繪圖兩項心智習性。

三、各版本教科書特色分析

各版本教科書幾何圖形主題內容經分析後其心智習性的特色為：K 版－從生活體驗與實作建立心智習性；H 版－以幾何物件結構的關係發展心智習性的連結；N 版－利用人工製品轉化幾何心智習性建立。相關說明如下：

（一）K 版教科書特色－從生活體驗與實作建立心智習性

1. 透過鏡子實測理解線對稱圖形定義

K 版設計之內容要求學生利用鏡面「鏡射」的原理呈現出線對稱圖形（圖 15），導引對稱軸與對稱圖形的概念，透過鏡射實作與觀察理解線對稱圖形的產出原理，獲得完整的圖形結構關係，促進學生對幾何圖形特徵關係的推理。

2. 透過實物操作與觀察理解等周長不等面積之圖形變化

K 版以不同顏色的扣條組成長方形圖形，利用扣條顏色彰顯長方形圖形兩雙對邊相等與平行的特徵（圖 16），協助學生建立完善的圖形概念，並透過實作觀察，瞭解長方形變動後形成平行四邊形不變的特徵，依照特徵關係歸納長方形圖形和平行四邊形的包含關係，且明白圖形等周長不等面積的現象。

3. 應用圓概念配合生活工具實測距離

K 版提供生活實物具有圓周率與圓概念之工具，設計活動提供學生操作（圖 17），此種體驗活動刺激學生學習數學的動機，擴展學生對圓原理的應用機會，進而解決日常生活中有關圓的問題。

4. 提供示例建立平行四邊形與三角形面積關係

為協助學生理解三角形面積公式中除以 2 的概念，K 版教科書提供兩三角形組成平行四邊形圖形的提示（圖 18），讓學生瞭解平行四邊形是三角形面積的兩倍，利用平行四邊形面積公式求出答案後需再除以 2，才能獲得三角形的面積，減少三角形面積公式解題的錯誤。

（二）H 版教科書特色－以幾何物件結構的關係發展心智習性的連結

1. 利用全等三角形各角組合成平角瞭解三角形內角和為 180 度



圖 15 鏡子實測理解線對稱圖形定義

資料來源：康軒文教事業（2015a）。康軒版國小數學課本第九冊（頁 59）。臺北：作者。

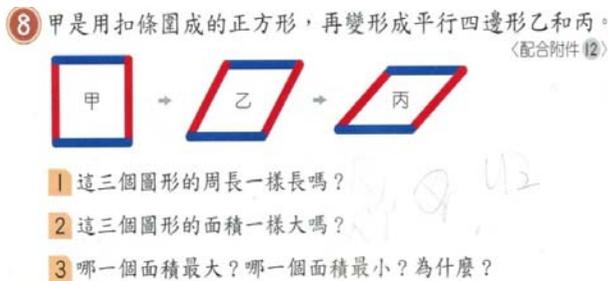


圖 16 操作與觀察理解等周長不等面積

資料來源：康軒文教事業（2015a）。康軒版國小數學課本第九冊（頁 82）。臺北：作者。



圖 17 應用圓概念工具實測距離

資料來源：康軒文教事業（2015b）。康軒版國小數學課本第十一冊（頁 107）。臺北：作者。

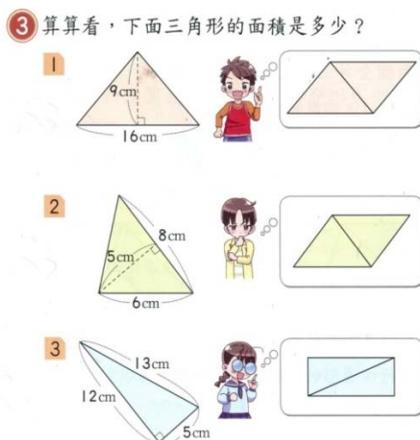


圖 18 示例建立平行四邊形與三角形面積關係

資料來源：康軒文教事業（2015a）。康軒版國小數學課本第九冊（頁 84）。臺北：作者。

三種版本教科書皆利用剪下一三角形之三內角，拼成一平角而獲得三角形內角和為 180 度的概念；H 版則另外提供三個全等三角形，依次顛倒將三個不同的角合併形成一平角而得知三角形內角和為 180 度（圖 19）。此設計對日後學習多邊形內角和的思考，提供推理的基礎，例如四邊形的內角和由 2 個三角形內角和組成，五邊形的內角和可以由 3 個三角形內角和構成。

2. 利用圓圖形部分與整體關係介紹圓心角

H 版以一圓之圓心角為 360 度做基礎，採用部分與整體之分數概念，引入扇形概念的介紹，並求取指定扇形之圓心角的角度（圖 20），此視覺化協助學生利用面積模式強化分數概念外，另透過圖形特徵明白扇形構成要素。

3. 透過數學史介紹圓周率之演變

H 版將圓周率概念與其值的發展透過歷史故事的解說（圖 21），增進學生對圓周率的認識並提升學生數學學習的興趣。

4. 提供繪圖步驟指導放大與縮小圖之實作

繪製放大或縮小圖對學生而言是項艱困的作業，H 版教科書呈現繪製的步驟，針對圖形對應邊與空間位置的概念，以邊長比例方式逐步引導將縮小圖形成功繪製（圖 22），協助學生掌握圖形要素的關係，理解放大和縮小圖的概念。

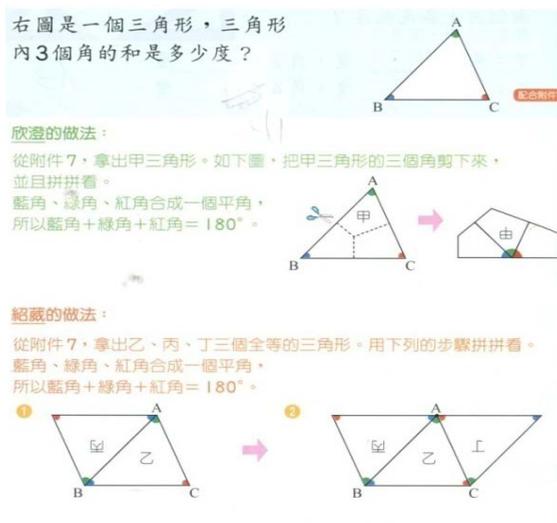


圖 19 利用全等三角形各角組合平角瞭解三角形內角和

資料來源：翰林出版事業（2015a）。翰林國小數學課本第九冊（頁52）。臺南：作者。

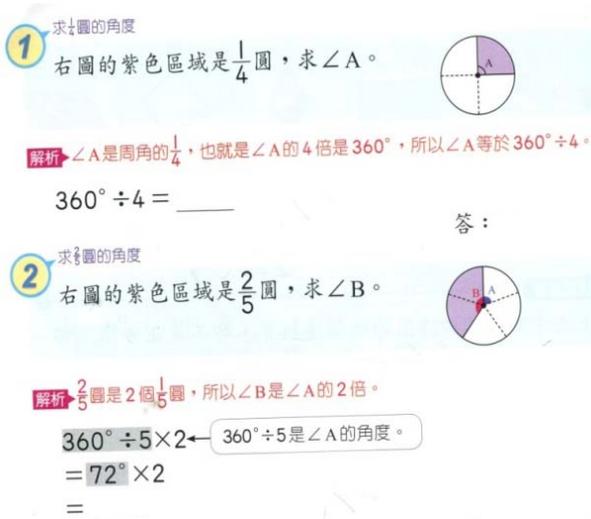


圖 20 利用圓圖形部分與整體關係介紹圓心角

資料來源：翰林出版事業（2015a）。翰林國小數學課本第九冊（頁58）。臺南：作者。

圓周率的歷史：

古代人們就知道一個圓的圓周長是直徑長的3倍多一點。中國古代把圓周率當作3，這種關係稱為「徑一周三」。在西方，基督教的《聖經》也把圓周率當作3。

魏晉時的數學家劉徽，察覺正多邊形邊數越多，越接近圓形，便在圓內畫出正多邊形，再比較周長與直徑的關係，計算出圓周率約為3.14，後來更進一步算到3.1416。

五代時數學家祖沖之使用邊數更多的正多邊形，把圓周率算到3.1415926。他選用 $\frac{22}{7}$ 與 $\frac{355}{113}$ 來表示圓周率，一般使用 $\frac{22}{7}$ 即可，如果需要更精確的計算才會使用 $\frac{355}{113}$ 。

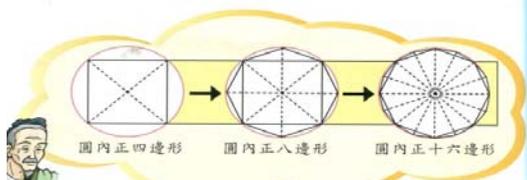
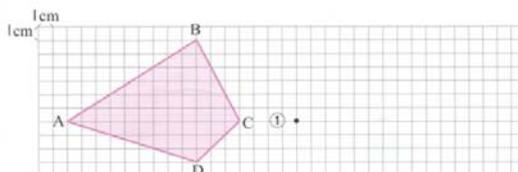


圖 21 透過數學史介紹圓周率之演變

資料來源：翰林出版事業（2015c）。翰林國小數學課本第十一冊（頁 80）。臺南：作者。

④ 畫出四邊形的 $\frac{1}{3}$ 倍縮小圖。



步驟一

在適當位置先固定一點①對應到點A。

步驟二

點B是從點A

往右9格再往上6格，

因為縮小 $\frac{1}{3}$ 倍，所以從點①

往右3格再往上2格，

找到點②對應到點B，

將點②和點①連起來。

步驟三

從點②往下2格再往右1格，

找到點③對應到點C，

將點③和點②連起來。

步驟四

從點③往左1格再往下1格，

找到點④對應到點D，

將點④和點③連起來。

步驟五

將點④和點①連起來。

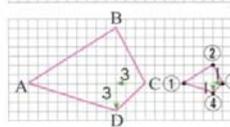
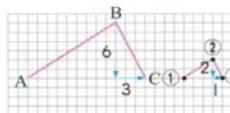
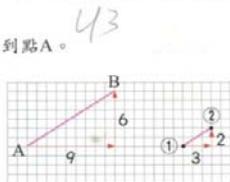


圖 22 提供繪圖步驟指導放大與縮小圖之實作

資料來源：翰林出版事業（2015c）。翰林國小數學課本第十一冊（頁 80）。臺南：作者。

(三) N 版教科書特色－利用人工製品轉化幾何心智習性建立

1. 利用幾何圖形折疊實作，探討線對稱現象

N 版教科書提供利用正方形色紙折疊方式體驗對稱軸的意義（圖 23），透過幾何圖形實作經驗，明白線對稱圖形的概念，此設計可強化學生進行物件構成所需要素或特徵的描述，與探索不變性物件形體的變化與轉換。

2. 運用釘板教導線對稱圖形的繪製

釘板是呈現與操作幾何概念的工具，N 版教科書利用他於線對稱圖形的教學，利用橡皮筋在釘板上單位距離的移動（圖 24），尋找對應邊和對應角，促進學生對線對稱圖形要素的理解，激發動手做數學的興趣，強化探索不變性的心智習性。

3. 利用扣條的顏色彰顯多邊形特徵

N 版教科書利用不同顏色代表不同長度的邊，經組合後讓學生辨識多邊形的特徵，讓學生經由觀察辨識正多邊形和多邊形在邊長和內角的差異（圖 25），例如正多邊形其邊長顏色一樣，所以邊長長度一樣，經測量後各內角角度也一樣，然而多邊形在邊長與內角上則不同，此設計可促進學生一般化的辨識和分類能力。

4. 利用工具測量探索圓周率、圓周和直徑的關係

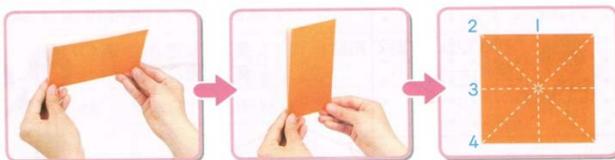
動手做數學學習幾何概念是培養心智習性一種重要的手段，且可培養學生對事物形體或數字的量感，N 版利用繪圖工具提供測量技術，讓學生經測量程序測出圓的直徑和圓周長度，理解直徑、圓周的概念與其之間的關係（圖 26），此種體驗促進學生探索不變性之物件形體變化和轉換與繪圖等心智習。

5. 利用圓規檢視與驗證扇形特徵

圓規是會員的重要工具，當學生理解兩角張開的距離等同圓的半徑，那麼應用至檢驗扇形圖形時將是一有力的工具，版設計利用圓規檢驗扇形圖形的特徵，讓學生明白扇形的組成要素，與和圓之間的關係（圖 27）。

7 拿出附件 P25 的圖卡摺摺看，並數一數，這些圖卡各有幾條對稱軸？

① 正方形有幾條對稱軸？



正方形的對角線是對稱軸嗎？

② 長方形有幾條對稱軸？



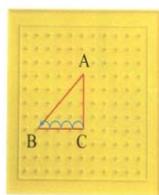
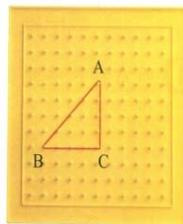
長方形的對角線是對稱軸嗎？

③ 圓形有幾條對稱軸？

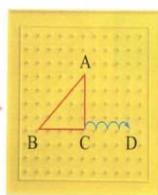
圖 23 利用幾何圖形折疊實作，探討線對稱現象

資料來源：南一書局（2015a）。南一國小數學課本第九冊（頁 61）。臺南：作者。

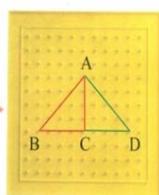
③ 右圖是一個以線段 AC 為對稱軸的線對稱圖形，請完成另一半。說說看，你是怎麼做的？



點 B 到對稱軸的距離是 4 格。



先找出點 B 的對稱點。



再把點 A、點 C 和點 D 連起來。

圖 24 運用釘板教導線對稱圖形的繪製

資料來源：南一書局（2015a）。南一國小數學課本第九冊（頁 65）。臺南：作者。

2 看圖完成下表。

圖形				
名稱	三角形			
邊的個數	3			
角的個數	3			
頂點的個數	3			

用 8 根扣條圍起來的圖形有幾個邊？幾個角？
 幾個頂點？這些圖形叫作什麼？
 用 12 根呢？

圖 25 利用顏色扣條彰顯多邊形特徵

資料來源：南一書局（2015a）。南一國小數學課本第九冊（頁 33）。臺南：作者。

一 認識圓周率

1 咖啡杯墊的直徑是幾公分？圓周長大約是幾公分？

1 測量直徑的方法：



▲用兩個三角板和一把直尺。

2 測量圓周長的方法：



▲在紙上描出杯墊的形狀。 ▲剪下描好的圖形。 ▲把剪下的紙對摺。 ▲對摺後打開，測量直徑的長度。



▲用一條綵帶繞杯墊一圈。 ▲把綵帶拉直，用直尺測量綵帶，圓周長大約是 28.3 公分。

圖 26 利用測量工具探索圓周率、圓周和直徑的關係

資料來源：南一書局（2015c）。南一國小數學課本第十一冊（頁 54）。臺南：作者。

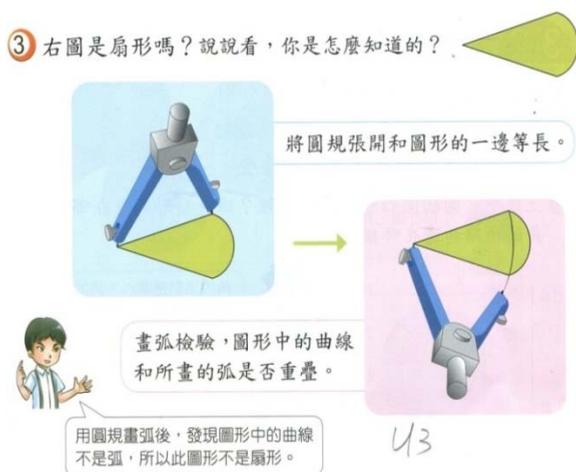


圖 27 利用圓規檢視與驗證扇形特徵

資料來源：南一書局（2015b）。南一國小數學課本第十冊（頁 35）。臺南：作者。

伍、結論與建議

本研究旨在透過教科書內容的分析，瞭解國小高年級階段教科書設計的幾何圖形主題，包含的心智習性的類型和比例為何？比較分析幾何概念內容之心智習性的特色，提供教學實務應用。根據研究目的獲致以下結論：

- 一、三版本之幾何圖形主題提供發展心智習性的內容，以關係推理和探索不變性兩項數學心智習性為主，兩心智習性合計比例約在 89 至 94%，三版本教科書彼此之間比例差異不大。
- 二、N 版教科書在一般化的命名、關係推理的單位換算、探索不變性的物件形體變化和轉換等內容，其比例較其他版本多。H 版在一般化的辨識與分類、關係推理的特徵關係描述和利用公式運算解題等心智習性的比例最高。K 版在探索不變性之物件組合與分解操作、繪圖等心智習性的比例最高。針對一般化、關係推理與探索不變性等心智習性之分佈比例加以分析，N 版在這三種心智習性的各類型分佈較為平均，H 版和 K 版則各類型的心智習性分佈差異較大。

三、**K** 版教科書特色為從生活體驗與實作建立心智習性：1. 透過鏡射理解線對稱圖形定義，2. 透過實物操作與觀察理解等周長不等面積之圖形變化，3. 應用圓概念利用生活工具實測距離，4. 提供示例建立平行四邊形與三角形面積關係；**H** 版教科書特色為以幾何物件結構的關係發展心智習性的連結：1. 利用全等三角形各角組合平角瞭解三角形內角和為 180 度，2. 利用圓圖形部分與整體關係介紹圓心角；3. 透過數學史介紹圓周率之演變，4. 提供繪圖步驟指導放大與縮小圖之實作；**N** 版教科書特色為利用人工製品轉化幾何心智習性建立：1. 利用幾何圖形折疊實作，探討線對稱現象，2. 運用釘板教導線對稱圖形的繪製，3. 利用扣條的顏色彰顯多邊形特徵，4. 利用工具測量探索圓周率、圓周和直徑的關係，5. 利用圓規檢視與驗證扇形特徵。

本研究採用 Cuoco 等人 (2010)、Driscoll 等人 (2007) 和 Costa 與 Kallick (2009) 的心智習性模式作為教科書內容分析的架構，探討比較不同版本教科書有關幾何圖形主題包含的數學心智習性的類型和比例，擴展先前研究集中在教科書之單元數、題數、表徵比較分析的主題和範圍，將重點轉移至對教科書內容有關認知成分的探討，提供不同研究的領域和觀點；台灣三套教科書對於培養學生數學心智習性的重點，集中在關係推理和不變性的探索，此設計安排方式不僅可掌握幾何內容的數學本質外，尚可促進學習與認知層次的提升；不同版本教科書的內容與設計的特色，可提供教師教學時針對學生的特質與需求，進行課程內容的補充和調整。從研究歷程與發現，作者提出以下建議，做為未來教科書比較分析研究的參考。

- (一) 針對相同主題而分佈在不同年級進行教學順序產生之學習效果與心智習性之間的關連，可深入探索，建立教科書內容的排序與學習效果或認知之間更有系統的探討。
- (二) 本研究雖以一般化、關係推理與不變性作為心智習性分析的架構，透過對教科書內容的比對和分析建構出不同的子類型，唯此為作者個人的分類基模，在研究方法和分析的類目上尚有不足之處，日後的研究可再加以補充擴展。

- (三) 作者雖將數學心智習性予以分類進行探索，唯教科書設計者呈現之內容所欲培養的數學目標包含數個心智習性，其意圖非研究者可臆測，亦非本研究方法可含蓋，因此進行教科書分析時可融入編輯委員參與，採用更精細方法分析，以建立更客觀可靠資料。
- (四) 本研究對三套教科書設計之幾何圖形心智習性之內容，進行比較仍屬靜態分析，實際情境下，學生心智習性動態發展可針對各版本設計的內容進行長期實驗，以瞭解各版本教材設計對學生幾何概念認知發展的影響。
- (五) 三套教科書皆設計眾多豐富的心智習性內容，且鼓勵動手做數學的主張，唯數學概念發展與學習表現繫乎教師教學的技巧，教師是否能將教科書設計之精髓與要領呈現於課堂，則需對課程教材深入探究，因此要提升和發展學生堅實的數學心智，需將教學和課程分析結合一體，探究課程如何在教學歷程精緻實施，才能發揮最大效果。

參考文獻

- 朱建正（1998）。立體圖形的教材處理。載於國家教育研究院（主編），**國民小學數學科新課程概說－高年級**（頁184-193）。臺北：國家教育研究院。
- [Zhu, J.-Z. (1998). Three dimensional graphics teaching materials. In National Academy for Educational Research (Ed.), *National primary school mathematics new curriculum overview--high grade* (pp. 184-193). Taipei, Taiwan: National Academy for Educational Research.]
- 南一書局（主編）（2015a）。**南一國小數學課本第九冊**。臺南：作者。
- [Nani Educational Publishing Group. (Ed.). (2015a). *Nani elementary school mathematics textbooks* (Vol. 9). Tainan, Taiwan: Author.]
- 南一書局（主編）（2015b）。**南一國小數學課本第十冊**。臺南：作者。
- [Nani Educational Publishing Group. (Ed.). (2015b). *Nani elementary school mathematics textbooks* (Vol. 10). Tainan, Taiwan: Author.]
- 南一書局（主編）（2015c）。**南一國小數學課本第十一冊**。臺南：作者。
- [Nani Educational Publishing Group. (Ed.). (2015c). *Nani elementary school mathematics textbooks* (Vol. 11). Tainan, Taiwan: Author.]
- 徐偉民、徐于婷（2009）。國小數學教科書代數教材之內容分析：臺灣與香港之比較。**教育實踐與研究**，22（2），67-94。
- [Hsu, W.-M., & Hsu, Y.-T. (2009). The content analysis of algebra material in the elementary mathematic textbooks of Taiwan and Hong Kong. *Journal of Educational Practice and Research*, 22(2), 67-94.]
- 教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北：作者。
- [Ministry of Education. (2008). *Mathematics fields of study draft amendments table in general guidelines of grade 1-9 curriculum of elementary and junior high school education*. Taipei, Taiwan: Author.]
- 陳嘉皇（2013）。國小六年級學生運用一般化基模進行圖形規律問題解題之研究。**教育科學研究期刊**，58（1），59-90。
- [Chen, C.-H. (2013). Application of generalization schemas to solve figural pattern problems on 3 sixth graders. *Journal of Research in Education Sciences*, 58(1), 59-90. doi:10.3966/2073753X2013035801003]
- 康軒文教事業（主編）（2015a）。**康軒版國小數學課本第九冊**。臺北：作者。
- [Kang Hsuan Educational Publishing Group. (Ed.). (2015a). *KH elementary school mathematics textbooks* (Vol. 9). Taipei, Taiwan: Author.]
- 康軒文教事業（主編）（2015b）。**康軒版國小數學課本第十一冊**。臺北：作者。
- [Kang Hsuan Educational Publishing Group. (Ed.). (2015b). *KH elementary school mathematics textbooks* (Vol. 11). Taipei, Taiwan: Author.]

- 楊德清、陳仁輝（2011）。臺灣、美國和新加坡三個七年級代數教科書發展學生數學能力方式之研究。《科學教育學刊》，19（1），39-67。
- [Yang, D.-C., & Chen, R.-H. (2011). A study of the methods for developing 7th-graders' mathematical ability in selected algebra textbooks from Taiwan, U.S.A. and Singapore. *Chinese Journal of Science Education*, 19(1), 39-67.]
- 翰林文教事業（主編）（2015a）。翰林國小數學課本第九冊。臺南：作者。
- [Han Lin Educational Publishing Group. (Ed.). (2015a). *Han Lin elementary school mathematics textbooks* (Vol. 9). Tainan, Taiwan: Author.]
- 翰林文教事業（主編）（2015b）。翰林國小數學課本第十冊。臺南：作者。
- [Han Lin Educational Publishing Group. (Ed.). (2015b). *Han Lin elementary school mathematics textbooks* (Vol. 10). Tainan, Taiwan: Author.]
- 翰林文教事業（主編）（2015c）。翰林國小數學課本第十一冊。臺南：作者。
- [Han Lin Educational Publishing Group. (Ed.). (2015c). *Han Lin elementary school mathematics textbooks* (Vol. 11). Tainan, Taiwan: Author.]
- Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351-382.
- Costa, A. L., & Kallick, B. (2009). *Habits of mind across the curriculum: Practical and creative strategies for teachers*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of minds: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 375-402.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (2010). Contemporary curriculum issues: Organizing a curriculum around mathematical habits of mind. *Mathematics Teacher*, 103(9), 682-688.
- Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Driscoll, M., DiMatteo, R. W., Nikula, J., & Egan, M. (2007). *Fostering geometric thinking: A guide for teachers, grades 5-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Eisner, E. W. (1997). Cognition and representation: A way to pursue the American dream? *Phi Delta Kappan*, 78(5), 348-353.
- Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 308-345.
- Goldenberg, E. P. (1996). "Habits of mind" as an organizer for the curriculum. *Journal of Education*, 178(1), 13-34.
- Goldenberg, E. P. (2009). *Mathematical habits of mind and the language-learning brain: Mathematics as a second language*. Paper presented at an AMS-MAA-MER Special Session on Mathematics and Education Reform, Joint Mathematics Meetings, Washington, DC. Retrieved from <http://www.math.utep.edu/Faculty/kienlim/hom.html>

- Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 127-150.
- Harel, G. (2007). The DNR system as a conceptual framework for curriculum development an instruction. In R. Lesh, J. Kaput & E. Hamilton (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 263-280). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In B. Gold & R. Simons (Eds.), *Current issues in the philosophy of mathematics from the perspective of mathematicians* (pp. 265-290). Washington, DC: Mathematical American Association.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction*, 24(1), 73-122.
- Kobiela, M., & Lehrer, R. (2015). The codevelopment of mathematical concepts and the practice of defining. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(4), 423-454.
- Köse, N. Y., & Tannisli, D. (2014). Primary school teacher candidates' geometric habits of mind. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 14(3), 1220-1229.
- Lehrer, R., Kobiela, M., & Weinberg, P. J. (2012). Cultivating inquiry about space in a middle school mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, 45(3), 365-376.
- Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2330-2339).
- Mark, J., Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Sword, S. (2010). Developing mathematical habits of mind. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 505-509.
- Muis, K. R. (2004). Personal epistemology and mathematics: A critical review and synthesis of research. *Review of Educational Research*, 74(3), 317-377.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Perkins, D. (1999). The many faces of constructivism. *Educational Leadership*, 57(3), 6-11.
- Perrone, V., & Kallick, B. (1997). Generative topics for process curriculum. In A. Costa & R. Liebmann (Eds.), *Supporting the spirit of learning: When process is content* (pp. 23-24). Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York, NY: Academic Press.

- Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (A. Kozulin, Ed. & Trans.). Cambridge, MA: MIT Press.
- Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 205-215.
- Yang, D. C., Reys, R. E., & Wu, L. L. (2010). Comparing the development of fractions in the fifth- and sixth-grades' textbooks of Singapore, Taiwan, and the USA. *School Science and Mathematics*, 110(3), 118-127.
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-629.